BEITRÄGE

ZUR

GEOMETRIE DER BEWEGUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

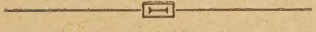
ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

VORGELEGT

VON

RUDOLPH HERMANN JECKE
AUS STEGLITZ B. BERLIN.



BERLIN 1909,
BUCHDRUCKEREI VON ANTON BERTINETTI.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551526_0092

BEITRÄGE

ZUR

GEOMETRIE DER BEWEGUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

VORGELEGT

VON

RUDOLPH HERMANN JECKE

AUS STEGLITZ B. BERLIN.

BERLIN 1909,

BUCHDRUCKEREI VON ANTON BERTINETTI.

Referent: Prof. Dr. Staude.

Herrn Direktor OTTO ANDRÉE

in dankbarer Verehrung

gewidmet

vom Verfasser.

Unter dem Titel „Sur les Roulettes“ ist in der „Mathesis„ Receuil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et I. Neuberg 1882, tome II ein Aufsatz von Habich enthalten, in welchem folgender Satz bewiesen wird: „Wenn eine ebene Kurve (A) auf einer Geraden g rollt und hierbei ein Punkt P ihrer Ebene eine Kurve (R) beschreibt, so wird, wenn man die Fußpunktenkurve (F) des Punktes P in Bezug auf die Kurve (A) auf (R) rollen läßt, P die Gerade g beschreiben“. Dieser Satz ist nur ein spezieller Fall einer Regel, welche die Entstehungsweise zweier Kurven (S) und (P) lehrt von der Eigenschaft, dass, wenn (P) auf (S) rollt, eine in der Ebene von (P) liegende Kurve (B) beständig eine Gerade berührt. Ferner läßt sich eine zweite Art der Erzeugung von Kurvenpaaren (R) und (F) aufstellen, die nicht nur der obengedachten Verallgemeinerung, sondern auch der Ausdehnung auf räumliche Bewegung fähig ist.

Diese Betrachtungen sollen den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden, nachdem einige sich an den Habich'schen Satz anknüpfende Erörterungen vorausgeschickt worden sind.

Des Zusammenhangs wegen geben wir zunächst einen

Beweis des Habich'schen Satzes § 1.

wobei wir von dem Steiner'schen Satze ausgehen, daß die von correspondierenden Punkten begrenzten Bogenlängen der Kurven (R) und (F) gleich sind (vergl. Steiner: Vom Krümmungsschwerpunkte ebener Kurven).

Ist nämlich (Fig. 1) A der Punkt, in welchem die rollende Kurve (A) die Gerade g berührt und $d\alpha$ der Kontingenzwinkel der ersteren in diesem Punkte, so wird das Bogenelement der von dem Punkte P erzeugten Roulette

$$A P . d\alpha$$

Die Fußpunktenkurve kann man sich durch den Scheitel B eines rechten Winkels beschrieben denken, von welchem ein Schenkel durch den festen Punkt P geht, während der andere Schenkel fortwährend die Kurve (A) berührt. Die Elementarbewegung dieses Winkels ist eine Rotation desselben um das Momentanzentrum J, welches durch den Schnittpunkt der in P auf B P und in dem Berührungspunkte A auf A B errichteten Lote bestimmt wird. Die Amplitute der Drehung, durch welche der rechte Winkel aus einer Lage in die nächstfolgende gelangt, ist gleich dem Kontingenzwinkel $d\alpha$ der Kurve (A) im Punkte A, also das Element des von B beschriebenen Bogens

$$J B \,.\, d\alpha$$

Da aber J B gleich P A ist, so folgt, daß die einem und demselben Punkte A der Grundkurve (A) entsprechenden Bogenelemente der Roulette und der Fußpunktenkurve gleich sind.

R und F (Fig. 2) seien zwei entsprechende (zu einem und demselben Punkte A der Kurve (A) gehörende) Punkte der Roulette und der Fußpunktenkurve; die Tangente der Roulette steht dann auf R A, diejenige der Fußpunktenkurve auf F J senkrecht; die von diesen beiden Tangenten mit R D (dem von R auf g gefällten Lot) beziehentlich P F gebildeten Winkel sind somit einander gleich. Denkt man sich nun die Fußpunktenkurve so mit der Roulette in Berührung gebracht, daß F und R sowie die entsprechenden Teile der Tangenten zusammenfallen, und ferner F P in die Richtung R D fällt, so muß P in die Gerade g fallen.

Ist nun R_1 und F_1 ein weiteres Paar entsprechender Punkte, und bringt man wieder die beiden Kurven in der oben angegebenen Weise in Berührung miteinander, so fällt P wieder in die Gerade g; da aber der Bogen $R R_1$ nach dem Steiner'schen Satze gleich dem Bogen $F F_1$ ist, so wird man das mit der Fußpunktenkurve verbundene ebene System auch dadurch aus der ersteren in die zweite Lage bringen können, daß erstere auf der durch P erzeugten Roulette, ohne zu gleiten, rollt.

Ebenso muß P bei allen Zwischenlagen, in die die Fusspunktenkurve bei ihrer rollenden Bewegung gelangt, in die Gerade

g fallen. Zu beachten ist hierbei, dass (F) so mit (R) in Berührung gebracht werden muß, daß der Radius vector F P und das von R auf g gefällte Lot auf dieselbe Seite der gemeinschaftlichen Tangente von (R) und (F) fallen.

Der relative Kontingenzwinkel der Kurven (R) und (F). § 2.

Den relativen Kontingenzwinkel der beiden Kurven (R) und (F) oder auch die Amplitute der momentanen Drehung d δ bestimmt man leicht, wie folgt:

R und R_1 seien zwei aufeinanderfolgende Punkte der Kurve (R) und F, F_1 die entsprechenden Punkte von (F). Fällt nun zunächst der Radiusvector F P mit der Ordinate R D zusammen, so muß durch die Elementarrotation um R als Momentanzentrum F_1 P mit R_1 D_1 zur Deckung gebracht werden. Die Amplitute dieser Drehung ist der von den beiden Radiivectoren P F und P F_1 eingeschlossene Winkel d. h. der dem Punkte F entsprechende Kontingenzwinkel der Kurve (A).

Bezeichnen wir nun das zwischen R und A liegende Stück der Normalen mit r und das gemeinschaftliche Bogenelement mit dσ, so folgt: $r \cdot d\delta = r \cdot d\alpha = d\sigma$, also

$$r = \frac{d\sigma}{d\delta}$$

Da ferner die Strecke r, wie man leicht übersieht, stets auf derjenigen Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegt, nach welcher hin die Drehung nicht erfolgt (cfr. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1879, T. I, Seite 460) so folgt, daß A für den betreffenden Augenblick der Bewegung der Wendepol ist. Wir finden somit den bekannten Satz bestätigt, daß, wenn bei der ebenen Bewegung ein Punkt eine gerade Linie beschreibt, auf letzterer stets der Wendepol liegen muß.

Allgemein besteht nun für die ebene Bewegung zwischen dem Durchmesser w des Wendekreises und den Krümmungsradien ρ und ρ' der festen und der auf letzterer rollenden Kurve die Relation

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$$

worin, wenn man den Krümmungsradius der festen Kurve immer als positiv ansieht, w und ρ' als positiv oder als negativ zu betrachten sind, je nachdem diese Strecken auf der entgegengesetzten oder auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente wie ρ liegen. Aus Obigem erhalten wir für die Kurven (R) und (F)

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r}$$

mit welcher Gleichung wir zu dem von Catalan (Bulletin de l'Academie de Bruxelles, 2. s., t. XXVII) durch Rechnung gefundenen Satze gelangt sind, daß die Summe der reziproken Werte der Krümmungsradien in entsprechenden Punkten der zu ein und derselben Grundkurve (A) gehörenden Roulette und Fußpunktenkurve eines Punktes gleich dem reziproken Werte der Normalen der ersteren (zwischen (R) und der Geraden g genommen) ist, wobei bezüglich der Vorzeichen von ρ, ρ' und r das oben Gesagte gilt.

Die Gleichung

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$$

läßt sich auch dahin interpretieren, daß, wenn man den Abstand $K_2 M$ des Krümmungsmittelpunktes der beweglichen Kurve vom Momentanzentrum M um sich selbst bis K'_2 verlängert, die Punkte M und K'_2 das eine, der Wendepol A und der Krümmungsmittelpunkt K_1 der festen Kurve das andere Paar einer harmonischen Punktreihe bilden.

Liegt also in unserem Falle K_1

1) auf R A oder auf der Verlängerung dieser Linie über A hinaus, so fällt K'_2 und somit K_2 auf dieselbe Seite der Normale (R als Trennungspunkt betrachtet)

2) auf der Verlängerung von A R über R hinaus, so werden, wenn

a) $K_1 R < R A$

K'_2 und K_2 ebenfalls auf derselben Seite wie K_1, dagegen wenn

b) $K_1 R > R A$

K'_2 und K_2 auf der entgegengesetzten Seite liegen.

Im ersteren Falle wenden beide Kurven der Linie A R die konkave Seite zu, im zweiten, wenn $R K_1 < R A$ ist, die konvexe, während wenn $R K_1 > R A$ ist, die Kurve (R) der Geraden R A die konvexe, die Kurve (F) derselben die konkave Seite zuwendet.

Man findet nun bekanntlich den Krümmungsmittelpunkt K_1 für einen beliebigen Punkt R der Roulette (vergl. Schell, T. I, S. 460), indem man vom Wendepol J, im vorliegenden Falle dem Mittelpunkt des Krümmungskreises der Grundkurve (A) im Punkte A, auf die Gerade R A das Lot $J J_1$ fällt, A R über R hinaus um sich selbst bis R' verlängert, und zu R', J, A den vierten, J_1 zugeordneten harmonischen Punkt sucht.

Mit Hülfe dieser Konstruktion überzeugt man sich leicht, daß, wenn R auf der Verlängerung von $A J_1$ über J_1 hinaus liegt, der Krümmungsmittelpunkt K_1 in die Verlängerung von R A über A und wenn R auf der Verlängerung von $A J_1$ über A hinaus liegt, in die Linie A R fällt; ferner, daß, wenn R zwischen J_1 und A liegt, K_1 in die Verlängerung von A R über R hinaus fällt und daß für

$$R A < \frac{A J_1}{2}$$

$$K_1 R < R A$$

dagegen für

$$R A > \frac{A J_1}{2}$$

$$K_1 R > R A$$

ist.

Nach den vorhergehenden Betrachtungen können wir daher folgenden Satz aussprechen:

„Bestimmt man in dem Punkte A, in welchem die Grundkurve (A) die Gerade g berührt, den Krümmungsmittelpunkt J und konstruiert über J A als Durchmesser einen Kreis, sowie einen zweiten, welcher den Radius Q A des ersteren zum Durchmesser hat, so werden

1) wenn R außerhalb des größeren Kreises liegt, beide Kurven der Geraden R A die konkave,

2) wenn R innerhalb des kleineren Kreises liegt, beide Kurven derselben die konvexe Seite zuwenden,

Liegt R

3) in dem durch die Peripherien der beiden Kreise begrenzten Raume, so wendet (R) der Geraden R A ihre konvexe, (F) derselben ihre konkave Seite zu."

Liegt R auf der Peripherie des größeren Kreises, so hat die Kurve (R) in demselben einen Wendepunkt, und da infolgedessen $R A = A K_2'$ sein muß, so fällt K_2 nach A. Wenn endlich R auf der Peripherie des kleineren Kreises liegt, so fällt K_1 in diejenige des größeren und es ist somit $R K_2'$ und folglich auch $R K_2$ unendlich groß. Für derartige Punkte hat also (F) einen Wendepunkt.

Um diese Betrachtungen auf ein Beispiel anzuwenden, wählen wir als Kurve (A) eine Ellipse und als Punkt P deren Brennpunkt. Die von letzterem beim Rollen der Ellipse auf einer Geraden beschriebene Kurve ist bekanntlich die Meridiankurve der Flächen konstanter mittlerer Krümmung (vergl. Delaunay „Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante", Journal d. M. Liouville t. VI, p. 309) und die Fußpunktenkurve des Brennpunktes P in Bezug auf die Ellipse ein Kreis über der großen Achse als Durchmesser, daher der Satz: „Läßt man auf der der Rotationsachse zugewandten Seite der Meridiankurve der Flächen konstanter mittlerer Krümmung in deren Ebene einen Kreis rollen, dessen Durchmesser gleich der großen Achse der die erstere erzeugenden Ellipse ist, so wird ein im Innern des Kreises gelegener fester Punkt sich in der Rotationsachse der Fläche bewegen. Berühren sich der rollende Kreis und die Meridiankurve in einem Punkte eines Breitenkreises von kleinstem oder größtem Radius, so ist der betreffende feste Punkt durch den Durchschnitt des nach dem Berührungspunkte gezogenen Radius des Kreises mit der Rotationsachse bestimmt".

Für die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes im Punkte A der Ellipse bedienen wir uns folgender Konstruktion:

Auf der zum Punkt A der Ellipse gehörenden Normalen der letzteren errichtet man (Fig. 3) in deren Schnittpunkte H mit der großen Achse ein Lot, welches den Brennstrahl P A in B schneidet; das auf P A in B errichtete Lot trifft die Normale im Krümmungsmittelpunkte J. Hieraus ergibt sich, daß P innerhalb oder außer-

halb des über A J als Durchmesser beschriebenen Kreises liegt, je nachdem A auf dem Bogen C D des ersten oder auf dem Bogen D E des zweiten Quadranten der Ellipse liegt (resp. auf dem dritten oder vierten); für die Punkte D und F geht der fragliche Kreis durch den Punkt P; ersteren entsprechen daher Wendepunkte der Roulette und für alle Lagen des Punktes A zwischen C und D muß diese der Geraden P A ihre konvexe, für alle Lagen zwischen D und E ihre konkave Seite zukehren.

Der kleinere Kreis, welcher den Radius Q A des ersteren zum Durchmesser hat, schneidet A B im Punkte G, sodaß A G = G B ist; da auch H K = H B, so kann man auch G erhalten, wenn man durch H eine Parallele zu der Verbindungslinie von A mit dem anderen Brennpunkt zieht. Aus dieser Konstruktion folgt, daß P stets auf der Verlängerung von A G liegt, also nie im Innern oder auf der Peripherie des kleineren Kreises liegen kann.

Die Enveloppen der Geraden des zu (R) gehörenden Systems bei der umgekehrten Bewegung. § 3.

Lassen wir die Kurve (R) auf (F) rollen, so wird die Gerade g beständig durch den Punkt P gehen. Es soll nun zunächst die Enveloppe einer zu g senkrechten Geraden g_1 untersucht werden.

Fällt man (Fig. 4) vom Momentanzentrum R ein Lot auf g_1, so bildet dieses die Normale der Enveloppe und man erhält den Krümmungsmittelpunkt der letzteren, wenn man jenes Lot bis zum Durchschnitt mit dem Wendekreis der umgekehrten Bewegung verlängert. Letzterer ist aber der über der gemeinschaftlichen Normale R D als Durchmesser beschriebene Kreis, also der Fußpunkt des von D auf R G gefällten Lotes der Krümmungsmittelpunkt. Der geometrische Ort dieses Punktes ist die Enveloppe der Geraden G A, letztere aber offenbar nichts anderes als die Grundkurve der beiden Kurven (R) und (F).

Die Enveloppe der Geraden g_1 ist also die Evolvente der Grundkurve (A).

Ein spezieller Fall dieses Satzes findet sich in Tome 10 der „Nouvelles annales“, 2ème serie, wo bewiesen wird, daß die Enveloppe einer Geraden g, welche senkrecht zur Direktrix einer auf

einer Geraden h rollenden Kettenlinie steht, die Evolvente einer Parabel ist, die von h im Scheitel berührt wird. Es folgt dies aus dem allgemeinen Satze, wenn man bedenkt, daß der Brennpunkt einer auf einer Geraden rollenden Parabel eine Kettenlinie beschreibt, und ferner die Fußpunktenkurve des Brennpunktes der Parabel in Bezug auf letztere die Scheiteltangente ist.

Der oben angeführte Satz führt sofort zur Bestimmung der Kurven (C) und (Γ) für die Bewegung eines ebenen Systems, von welchem eine Gerade fortwährend eine gegebene Kurve berührt und eine zweite zur ersteren senkrechte Gerade durch einen festen Punkt P geht.

Die Kurve (C) ist in diesem Falle die Fußpunktenkurve des Punktes P in Bezug auf die Evolute der gegebenen Kurve, die Kurve (Γ) die beim Abrollen der Evolute auf einer Geraden g durch den Punkt P erzeugte Roulette.

Der Punkt O, in welchem sich g und g_1 schneiden, beschreibt eine Kurve, welche die Fußpunktenkurve des festen Punktes in Bezug auf die gegebene Kurve ist. Denkt man sich nun erstere als gegeben, die Bewegung also dadurch definiert, daß ein Punkt O einer Geraden g auf einer Kurve zu bleiben gezwungen ist, und die Gerade fortwährend durch einen festen Punkt P geht (allgemeine Konchoidenbewegung), so kann man die Kurven (C) und (Γ) bestimmen, indem man zunächst die Enveloppe der Lote auf den von P nach den Punkten der Kurve gezogenen Radiivektoren d. h. die erste negative Fußpunktenkurve sucht und für die Evolute der letzteren die Kurven (R) und (F) bestimmt.

Die Enveloppe einer durch O gehenden Geraden g_2, welche mit g einen beliebigen Winkel α bildet, steht zu derjenigen von g_1 in einer einfachen Beziehung. Bezeichnen wir (Fig. 5) letztere mit (E) und ist E der Punkt, in welchem sie von g_1 berührt wird, so erhalten wir zunächst das Momentanzentrum R als Durchschnitt der in E und P auf g bezw. g_1 errichteten Lote. Der Fußpunkt E_1 des von R auf g_2 gefällten Lotes ist der Berührungspunkt dieser Enveloppe (E_2). Verbindet man nun O mit R, E mit E_1 und letztere beiden Punkte mit P, so sind P O E_1 R und O R E_1 E Sehnenvierecke, mithin auch O E E_1 P ein solches, daher

$$E\hat{P}E_1 = R - \alpha \quad \text{und}$$
$$E\hat{E}_1 P = R$$

somit auch $$PE_1 = PE\sin\alpha.$$

Die Enveloppe (E_1) ist also eine der Kurve (E) ähnliche Kurve, die man erhält, wenn man die von P nach den Punkten derselben gezogenen Radiivektoren im Verhältnis $1 : \sin\alpha$ verkürzt und die auf diese Weise entstandene Kurve um den Winkel $R - \alpha$ dreht, oder auch, indem man an jeden dieser Radiivektoren den Winkel $R - \alpha$ anträgt und auf den neuen Schenkel von dem betreffenden Punkte der Kurve (E) ein Lot fällt.

Ist daher die Bewegung eines ebenen Systems dadurch definiert, daß wiederum eine Gerade g durch einen festen Punkt P geht, und eine unter dem Winkel α gegen sie geneigte Gerade die Kurve (E_1) berührt, so kann man die beiden Kurven (C) und (Γ) finden, indem man zuerst die ähnliche Kurve (E) ihrer Gestalt und Lage nach bestimmt, die Fußpunktenkurve des Punktes P in Bezug auf die Evolute dieser Kurve, sowie endlich die Roulette sucht, welche, wenn letztere auf einer Geraden rollt, von P erzeugt wird.

Zweite Erzeugungsweise von Polkurven, welche die geradlinige Bewegung eines Systempunktes bewirken. § 4.

Denken wir uns jetzt eine Kurve (A_1), welche so beschaffen ist, daß, wenn sie auf einer Geraden g rollt, die zu den Berührungspunkten gehörenden Krümmungsmittelpunkte dieselbe Kurve (R) bilden, welche vorher beim Rollen der Kurve (A) auf der Geraden g durch den Punkt P erzeugt wurde, so müssen die Krümmungsradien der Kurve (A_1) gleich den Radiivektoren der Fußpunktenkurve des Punktes P in Bezug auf die Kurve (A) sein; ferner müssen die Kontingenzwinkel der beiden Kurven (A) und (A_1), die zu entsprechenden Punkten der letzteren gehören, einander gleich sein, denn bezeichnet man dieselben mit $d\alpha$ und $d\alpha_1$ und ist β der von der Tangente der Kurve (R) im Punkte R mit der Geraden g gebildete Winkel, so ergeben sich für das Bogenelement der Kurve (R) die beiden Werte

$$d\sigma = r \,.\, d\alpha \quad \text{und}$$

$$d\sigma = \frac{\rho \,.\, d\alpha_1}{\cos\beta}$$

woraus sich wegen $\rho = r \,.\, \cos\beta$ die Gleichheit der Kontingenzwinkel ergibt.

Da nun ferner der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radiivektoren der Fußpunktenkurve gleich dem Kontingenzwinkel der Grundkurve (A) ist, so ist ersterer auch gleich dem von zwei aufeinanderfolgenden Krümmungsradien von (A_1) gebildeten Winkel. Man kann also die früher als Fußpunktenkurve von (A) erhaltene Kurve (F) direkt von der Kurve (A_1) ableiten, indem man von einem beliebigen Punkte P aus Gerade zieht, welche gleich und gleichgerichtet parallel den Krümmungsradien der Kurve (A_1) sind. Wir erhalten somit folgenden Satz: „Läßt man eine beliebige Kurve (A_1) auf einer Geraden g rollen und konstruiert in jeder Lage den zum Berührungspunkt gehörigen Krümmungsmittelpunkt derselben, dessen Ort die Kurve (R) sei, so erhält man diejenige Kurve (F), welche auf (R) rollen muß, damit ein fester Punkt ihrer Ebene die Gerade g beschreibt, indem man von einem beliebigen Punkte P Gerade zieht, welche gleich und gleichgerichtet parallel den Krümmungsradien der ruhenden Kurve (A_1) sind.“ Die beiden Kurven sind hierbei so miteinander in Berührung zu bringen, daß die einander entsprechenden Teile der Tangenten sowie die Ordinate $R A_1$ und der Radius vector P F aufeinander fallen.

Daß die Bogenlängen der auf diese Weise erhaltenen Kurven einander gleich sind, hat bereits Mannheim gezeigt, in der Abhandlung: „Lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe, qui roule sur une droite“ (Principes et developpements de géometrie cinématique p. 500), ohne jedoch auf die kinematische Bedeutung des betreffenden Satzes hingewiesen zu haben.

Unter den von ihm gegebenen Beispielen zeigt Mannheim, daß, wenn die Kurve (A_1) eine gemeine Cycloide ist, sich als der Ort der Krümmungsmittelpunkte ein Kreis ergibt, dessen

Radius gleich dem vierfachen, als Ort der Endpunkte der von einem Punkte P paralell und gleich den Krümmungsradien der Cycloide gezogenen Geraden ein zweiter Kreis, dessen Radius gleich dem doppelten Radius des Wälzungskreises der Cycloide ist, sodaß sich bei dieser Spezialisierung die Polkurven für die elliptische Hypocycloidenbewegung ergeben.

Ist die Kurve (A_1) gegeben, so findet man leicht die entsprechende Kurve (A), indem man nach Obigem zunächst die Kurve (F), sodann die Enveloppe der auf den Radiivektoren errichteten Lote d. i. die erste negative Fußpunktenkurve von (F) bestimmt.

In dem oben angeführten Beispiele gehen die auf P F in F errichteten Lote (Fig. 6) sämtlich durch den zu P in Bezug auf den Mittelpunkt symmetrisch liegenden Punkt P_1; die Kurve (A) reduziert sich also in diesem Falle auf einen Punkt, welche Spezifikation, wie man ohne weiteres erkennt, nach der Habich'schen Erzeugungsweise wieder zu den beiden Kreisen der elliptischen Hypocycloidenbewegung führt.

Ist dagegen (A) bekannt, so läßt sich die entsprechende Kurve (A_1) auf analytischem Wege, wie folgt, bestimmen: Betrachtet man P als den Mittelpunkt eines Polarkoordinatensystems, und ist $r = r(\varphi)$ die Gleichung der Kurve (A) in Bezug auf ein solches, so ergeben sich für die Koordinaten der durch P erzeugten Roulette die Ausdrücke

$$x - x_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \sqrt{r^2 + r'^2} - r \cdot \frac{dr}{ds}$$

$$y = r^2 \cdot \frac{d\varphi}{ds}$$

Durch Elimination von φ erhält man sodann eine Relation $y = f(x)$, oder, wenn s_1 den Bogen der Kurve (A_1) bezeichnet

$$\rho = f(s_1)$$

Nun ist aber, wenn man s_1 als unabhängige Variable betrachtet, und die rechtwinkeligen Koordinaten der Kurve (A_1) mit x_1 und y_1 bezeichnet werden, bekanntlich

$$\left(\frac{d^2 x_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y_1}{ds_1}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{f^2(s_1)} \qquad \text{und}$$

$$\left(\frac{dx_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2 = 1$$

Beide Gleichungen werden identisch erfüllt durch die Ausdrücke

$$x_1 = \int ds_1 \,.\, \sin \int \frac{ds_1}{f(s_1)}$$

$$y_1 = \int ds_1 \,.\, \cos \int \frac{ds_1}{f(s_1)}$$

in denen nur noch die Integrationskonstanten zu bestimmen sind. (cfr. Aoust, Analyse infinitésimale des courbes planes, 1873, p. 19).

§ 5. Weitere Beziehungen zwischen den Kurven (A) und (A_1).

Die Tangente der Kurve, welche man als Ort der Krümmungspunkte der Kurve (A_1) erhält, wenn letztere auf einer Geraden rollt, wird konstruiert, indem man (Fig. 7) den Krümmungsmittelpunkt M der Evolute von (A_1) mit dem Punkte A_1, in welchem die Kurve (A_1) die Gerade g berührt, verbindet und von dem betreffenden Kurvenpunkte R ein Lot auf A_1 M fällt: denn es ist

$$\text{tang } \beta = \frac{d\rho}{ds_1} = \frac{\frac{d\rho}{d\tau}}{\frac{ds_1}{d\tau}} = \frac{\rho_1}{\rho}$$

worin ρ_1 den entsprechenden Krümmungsradius der Evolute bezeichnet. (siehe Mannheim a. a. O.). Andererseits findet man den dem Punkte R entsprechenden Berührungspunkt von (A), indem man auf der Tangente, an (R) in R ein Lot errichtet, und es ist folglich der Krümmungsradius der Evolute von (A_1) gleich demjenigen Stück der in dem entsprechenden Punkte an die Kurve (A) gezogenen Tangente, welches von letzterem und dem Fußpunkte des von P auf dieselbe gefällten Lotes begrenzt wird.

Man kann somit die Kurve (A) auch dadurch erhalten, daß man von einem Punkte P aus Radiivektoren zieht, welche gleich

und parallel den Krümmungsradien der Kurve (A_1) sind und auf jedem derselben in dessen Endpunkte ein Lot errichtet, welches gleich und entgegengesetzt parallel dem Krümmungsradius der Evolute von (A_1) ist. Diese Lote sind nach Obigem die Tangenten der von ihren Endpunkten gebildeten Kurve.

Es sei nun (Fig. 8) P F gleich und parallel ρ und P F' gleich und parallel dem darauffolgenden Krümmungsradius $\rho + d\rho$. Errichten wir nun in F auf P F ein Lot F A, welches entgegengesetzt parallel und gleich ρ_1 ist, ferner in F' ein Lot $F' A' = \rho_1 + d\rho_1 = \rho_1'$, so geht dasselbe durch den Punkt A und es ist A A' gleich dem Element ds der Kurve (A). Nun ist

$$\begin{aligned} ds &= \rho_1' - F'A \\ &= \rho_1' - (\rho_1 - \rho \,.\, \text{tang}\, d\tau) \cos d\tau \\ &= \rho_1' - \rho_1 \,.\, \cos d\tau + \rho \,.\, \sin d\tau \\ &= \rho_1' - \rho_1 + \rho_1 (1 - \cos d\tau) + \rho \,.\, \sin d\tau \\ &= d\rho_1 + 2\,\rho_1 \,.\, \sin^2 \frac{d\tau}{2} + \rho \,.\, \sin d\tau \end{aligned}$$

oder unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$ds = d\rho_1 + \rho \,.\, d\tau$$

und durch Division mit $d\tau$

$$\bar{\rho} = \rho + \rho_2$$

worin $\bar{\rho}$ den Krümmungsradius der Kurve (A) bedeutet.

Der Krümmungsradius von (A) ist daher gleich der Summe des Krümmungsradius von (A_1) und desjenigen der zweiten Evolute dieser Kurve.

Wegen des Sinnes von ρ_2 ist hierbei folgendes zu bemerken.

Die Differentialquotienten

$$\frac{ds_1}{d\alpha}, \frac{d\rho}{d\alpha} = \rho_1, \frac{d\rho_1}{d\alpha} = \rho_2$$

sind sämtlich positiv, wenn s_1, ρ und ρ_1 gleichzeitig wachsen; dies ist aber nur der Fall, wenn (Fig. 9) ρ_1 entgegengesetzt der Richtung von ds_1 läuft und ρ_2 entgegengesetzt der Richtung von ρ.

Für die Cycloide

$x = a\,(v - \sin v)$; $y = 2a \,.\, \sin^2 \frac{v}{2}$ ist bekanntlich

$$s_1 = 4\,a - 4\,a \cos \frac{v}{2}$$

oder, wenn man als unabhängige Variable den Winkel w nimmt, den die Normale der Cycloide mit deren Basis bildet,

$$s_1 = 4a - 4a \cdot \cos w$$

$$\rho = \frac{ds_1}{dw} = 4a \cdot \sin w$$

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{dw} = 4a \cdot \cos w$$

$$\rho_2 = \frac{d\rho_1}{dw} = -4a \sin w$$

mithin $\bar{\rho} = \rho + \rho_2 = 0$, was mit dem obigen Resultate übereinstimmt, daß einer Cycloide als Kurve (A_1) ein Punkt als Kurve (A) entspricht.

§ 6. Die Krümmungsradien der Kurven (R) und (F) durch diejenigen der Kurve (A_1) und deren Evoluten ausgedrückt.

Um den Krümmungshalbmesser $\Re$ der Kurve (R) zu erhalten, denken wir uns dieselbe dadurch entstanden, daß in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf der X-Achse die Bogenlängen s_1 der Kurve (A_1) und auf der Y-Achse die denselben entsprechenden Krümmungsradien abgetragen werden; dann ist

$$\Re = \frac{\left(\frac{d\sigma}{ds_1}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\rho}{ds_1^2}}$$

Nun ist

$$d\sigma^2 = ds_1^2 + d\rho^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{ds_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{d\rho}{d\alpha_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\alpha_1}{ds_1}\right)^2 = \frac{\rho^2 + \rho_1^2}{\rho^2}$$

$$\frac{d^2\rho}{ds_1^2} = \frac{d\frac{\rho_1}{\rho}}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{\rho \cdot \rho_2 - \rho_1^2}{\rho^3}$$

also

$$\Re = \frac{(\rho^2 + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho \cdot \rho_2 - \rho_1^2}$$

Für den Krümmungsradius $\Re'$ der Kurve (F) ergibt sich aus der

im § 2 abgeleiteten Relation $\frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\mathfrak{R}'} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}}$

$$\mathfrak{R}' = \frac{(\rho^2 + \rho_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\,\rho_1^2 - \rho \,.\, \rho_2},$$

welchen Wert man auch direkt aus der bekannten Formel für den Krümmungsradius einer Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist, ableiten kann.

Für die Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte der Kurve (R) ergibt sich nun folgendes einfache Verfahren:

Wir fällen (Fig. 10) von dem Krümmungsmittelpunkte M_2 der zweiten Evolute ein Lot $M_2\,G$ auf die Normale $R\,A$ bezw. deren Verlängerung und bestimmen auf dieser Geraden den zu G in Bezug auf R symmetrischen Punkt J_1; sodann verlängern wir $R\,A$ über R hinaus um sich selbst bis zu R' und suchen den vierten harmonischen Punkt zu R', A und J_1, dieser ist dann der Krümmungsmittelpunkt K_1 der Kurve (R).

Errichten wir nämlich in R auf $A\,R$ ein Lot bis zu dessen Schnittpunkte H mit $M_1\,M_2$, so ist

$$M_1\,H = \frac{\rho_1^2}{\rho} \text{ also } \rho \,.\, \rho_2 - \rho_1^2 = H\,M_2 \,.\, \rho \text{ und}$$

$$R\,G = \frac{H\,M_2 \,.\, \rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}} = \frac{\rho \,.\, \rho_2 - \rho_1^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}} \text{ folglich}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\overline{R\,A}^2}{R\,G}$$

In Betreff der Richtung von $\mathfrak{R}$ ist zu berücksichtigen, daß (R) der Geraden g die konvexe oder konkave Seite zukehren muß, je nachdem $\frac{d^2\rho}{ds_1^2}$ d. i. $\frac{\rho \,.\, \rho_2 - \rho_1^2}{\rho^3}$ positiv oder negativ ist. Dieser Forderung wird aber durch obige Konstruktion Genüge getan, wovon man sich leicht überzeugt, indem man bedenkt, daß $\rho \,.\, \rho_2 - \rho_1^2$ nur positiv ist für $\rho_2 > H\,M_1$, Null für $\rho_2 = M_1\,H$, für alle anderen Werte aber negativ.

Wir denken uns nun (Fig. 11) durch den Punkt R als Scheitel eine Parabel gelegt, deren Achse in die Richtung $R\,A_1$ fällt und deren Parameter gleich ρ ist, ferner durch A_1 eine solche mit dem

Parameter $\frac{\rho}{2}$. Die erstere enthält den oben erwähnten Punkt H und die zweite wird durch das betreffende Lot in dem Punkte N geschnitten, für welchen R' H = H N: denn die Gleichung derselben ist auf R als Anfangspunkt bezogen

$$y^2 = \frac{\rho}{2}(x - \rho) \text{ also } M_1 N = \frac{2\rho_1^2 + \rho^2}{\rho^2} \text{ und}$$

$$H N = \frac{2\rho_1^2 + \rho^2}{\rho} - \frac{\rho_1^2}{\rho} = \frac{\rho_1^2 + \rho^2}{\rho} = R' H$$

Hieraus folgt, daß N A parallel H R ist. Liegt nun M_2 außerhalb der größeren Parabel, so liegt K_1 auf der Strecke R A oder auf deren Verlängerung über A hinaus.

Liegt M_2 innerhalb der kleineren Parabel, so liegt K_1 zwischen R und R', und liegt endlich M_2 in dem durch die Peripherieen der beiden Parabeln begrenzten Raume, so befindet sich K_1 auf der Verlängerung von A R' über R' hinaus.

Wie im § 2 gezeigt, wenden (R) und (F) der Linie A R im ersteren Falle die konkave, im zweiten Falle die konvexe Seite zu, während im dritten Falle die Kurve (R) der Geraden A R die konvexe, (F) derselben die konkave Seite zuwendet. Jenachdem M_2 in der Peripherie der größeren oder der kleineren Parabel liegt, hat (R) oder (F) einen Wendepunkt.

§ 7. Verallgemeinerung des Habich'schen Satzes.

Um die bisher angestellten Betrachtungen zu erweitern, legen wir uns die Frage vor: Welche geometrischen Beziehungen müssen zwischen zwei Kurven (C) und (Γ) bestehen, damit, wenn (Γ) auf (C), ohne zu gleiten, rollt, eine in der Ebene von (Γ) liegende, mit ihr fest verbundene Kurve (B) eine mit (C) fest verbundene Gerade berührt?

Zur Beantwortung dieser Frage benutzen wir folgende von Mannheim a. a. O. gegebene Verallgemeinerung des Steiner'schen Satzes:

„Läßt man eine ebene Kurve (A), mit welcher eine in derselben Ebene liegende Kurve (B) fest verbunden ist, auf einer

Geraden g rollen, und zieht in jeder Lage des Systems an (B) eine zu g parallele Tangente, so bilden sämtliche Berührungspunkte eine Kurve (S), (allgemeinere Roulette), deren Länge gleich ist der Länge derjenigen Kurve (P), welche man erhält, wenn man an die Kurven (A) und (B), dieselben jetzt als fest liegend gedacht, sämtliche parallelen Tangentenpaare zieht, und jedesmal von dem Berührungspunkte der Tangente an (B) auf die ihr parallele Tangente an (A) ein Lot fällt (allgemeinere Fußpunktenkurve).“

Dieser Satz läßt sich etwas einfacher, als in der von Mannheim angegebenen Weise, wie folgt, verifizieren:

Denkt man sich zwei in ein und derselben Ebene liegende, fest mit einander verbundene Kreise K und K_1 mit den Mittelpunkten M und M_1 von denen der eine K auf einer Geraden g rollt, und zieht man zu K_1 alle zu g parallelen Tangenten, so muß das von dem jedesmaligen Berührungspunkte B auf g gefällte Lot stets durch den Mittelpunkt M_1 gehen. Der Ort aller Punkte B ist daher eine Kurve, welche durch Parallelverschiebung der durch den Mittelpunkt M_1 erzeugten Roulette um den Radius dieses Kreises und in der Richtung eines auf g gefällten Lotes entstanden gedacht werden kann.

Der Ort aller Fußpunkte der von den Berührungspunkten der Tangenten an K_1 auf die parallelen Tangenten an K gefällten Lote ist nichts anderes, als die Fußpunktenkurve des Punktes M_1 in Bezug auf den Kreis um M, der Bogen derselben also gleich dem Bogen der von M_1 erzeugten Roulette, also auch gleich dem Bogen des Ortes der Punkte B.

Nachdem hiermit die Richtigkeit des Satzes für den besonderen Fall bewiesen ist, daß die Kurven (A) und (B) Kreise sind, ist dieselbe auch für den Fall beliebiger Kurven sofort zu übersehen. Denkt man sich nämlich in den Punkten A und B, in welchen die Kurven (A) und (B) von einem parallelen Tangentenpaare berührt werden, die Krümmungskreise K und K_1 konstruiert, so ergeben sich, da dieselben zwei Elemente mit den Kurven (A) und (B) gemein haben, für das System der letzteren dieselben Elemente d S und d P als für das System K und K_1.

Zugleich ergibt sich aus den vorstehenden Betrachtungen eine Normalenkonstruktion für die Kurven (S) und (P). Die Normale der von M_1 erzeugten Roulette ist $M_1 A$, man erhält also die Normale der Kurve (S) in B, wenn man zu der Verbindungslinie des zu diesem Punkte gehörigen Krümmungsmittelpunktes M_1 der Kurve (B) mit A eine Parallele zieht.

Die Kurve (P) kann man auch betrachten als den Ort für den Scheitel eines rechten Winkels, von welchem ein Schenkel die Kurve (A), der andere Schenkel die Evolute der Kurve (B) berührt: man erhält somit die Normale der Kurve (P) im Punkte P, indem man durch den Durchschnittspunkt D der in M_1 auf $M_1 P$ bezw. in A auf g errichteten Lote mit P verbindet.

Man sieht hieraus, daß die Normalen der Kurven (S) und (P) in den einem und demselben Punkte A entsprechenden Punkten S und P mit dem von S auf g bezw. von B auf die Tangente in A gefällten Lote gleiche Winkel bilden. Rollt nun die Kurve (A) auf g, und man fällt von dem einer bestimmten Lage derselben entsprechende Punkte S ein Lot auf g, so muß selbstverständlich die Kurve (P) durch den Fußpunkt P dieses Lotes gehen. Denken wir uns nun die Ebene der Kurve (P) um eine durch die Mitte von S P gehende in der Ebene von (S) liegende zu g parallele Achse um 180^0 gedreht, so wird der Punkt P mit S und die Tangente in P mit derjenigen in S zusammenfallen, die Kurven (S) und (P) sich also in der neuen Lage berühren. Der Punkt B fällt nach P und da B P Normale der Kurve (B) ist, so wird letztere die Gerade g im Punkte P berühren.

Rollt nun die Kurve (A) auf der Geraden g, bis sie letztere in dem Punkte A' berührt, so wird der Berührungspunkt der Kurve (B) und der Parallele zu g auf der Kurve (S) nach S' gerückt sein und der Fußpunkt des von B' resp. S' auf g gefällten Lotes ist der dem Punkte A' entsprechende Punkt P' der verallgemeinerten Fußpunktenkurve. Verfährt man nun wieder wie oben, so werden sich die Kurven (P) und (S) in dem Punkte S' und (B) und g sich in dem Punkte P' berühren. Da aber der Bogen PP' gleich dem Bogen SS' ist, und das ebengesagte von allen Zwischenlagen des mit (A) verbundenen Systems gilt, so

kann man dasselbe auch dadurch in die neue Lage gebracht denken, daß (P), ohne zu gleiten auf (S) rollt.

Wie bereits oben bemerkt, kann die Kurve (P) auch angesehen werden als der Ort für den Scheitel eines rechten Winkels, von welchem ein Schenkel die Kurve (A), der andere Schenkel die Evolute der Kurve (B) berührt.

Die Kurve (S) kann man sich beschrieben denken durch einen Punkt B auf einer zu g senkrechten Tangente an die Evolute zu (B), wenn diese Tangente auf der Evolute mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit wie (A) auf g rollt.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen: „Läßt man auf der zu den Kurven (A) und (B) gehörenden, durch Rollen der ersteren auf der Geraden g erzeugten allgemeineren Roulette (S) die zu denselben Kurven gehörende allgemeinere Fußpunktenkurve (B) rollen, nachdem beide in entsprechenden Punkten S und P so mit einander in Berührung gebracht worden sind, daß sich die korrespondierenden Teile der Tangenten decken und der P entsprechende Punkt B mit dem Fußpunkte des von S auf g gefällten Lotes zusammenfällt, so wird die mit (P) fest verbundene Kurve (B) fortwährend die Gerade g berühren".

Sind die Kurven (P) und (B) gegeben, handelt es sich also darum, eine Kurve zu finden, auf welcher eine andere rollen muß, damit eine mit letzterer Kurve fest verbundene Kurve beständig eine gerade Linie berührt, so ergibt sich (A) als Enveloppe der Lote, welche auf den Normalen der Kurve (B) in deren Schnittpunkten mit der Kurve (P) errichtet werden.

Anmerkung: Rollt (A) nicht auf einer Geraden, sondern auf einer kongruenten Kurve (A) und legt man in jeder Lage an die Kurve (B) eine zur gemeinschaftlichen Tangente der beiden Kurven (A) parallele Tangente, so bildet der Ort der Berührungspunkte eine Kurve, zu der man auch gelangt, wenn man für die feste Kurve (A) die Kurve (P) konstruiert, und daß zwischen (B) und (P) liegende Stück der Normale zu ersterer Kurve um sich selbst verlängert. Es ist dies die Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß, wenn man eine Kurve auf einer kongruenten Kurve rollen läßt, die Roulette eines Punktes P eine der Fußpunktenkurve ähnliche Kurve (Aehnlichkeitsverhältnis 2 : 1) ist.

8. Der relative Kontingenzwinkel der Kurven (S) und (P).

In derselben Weise wie im Paragraph 2 ergiebt sich, daß der relative Kontingenzwinkel der beiden Kurven gleich dem Kontingenzwinkel der Kurve (A) im Punkte A ist.

Errichten wir (Fig. 12) im Punkte A ein Lot auf g und ist J dessen Schnittpunkt mit der gemeinschaftlichen Normale der beiden Kurven (S) und (P) im Punkte B, so folgt, da $J B = A M_1$

$$J B = \frac{d\sigma}{d\alpha}, \text{ worin } d\sigma = d S = d P$$

und man schließt in derselben Weise, wie im § 2, daß J der Wendepol für den betreffenden Augenblick der Bewegung ist, wodurch wir den bekannten Satz bestätigt finden, daß, wenn eine Kurve (B) des beweglichen Systems fortwährend eine feste Gerade berührt, der Krümmungsmittelpunkt M'_1 der ersteren die Projektion des Wendepols auf die Normale in demjenigen Punkte ist, in welchem sie die Gerade g berührt (vergl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1879, T. I., S. 468).

Um nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen der relative Kontingenzwinkel der Kurven (S) und (P) gleich der Summe oder der Differenz der Kontingenzwinkel derselben ist, oder mit anderen Worten, wann die Krümmungsmittelpunkte auf verschiedenen oder auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen, wollen wir zunächst uns über die Krümmung der Kurve (P) orientieren.

Sind (Fig. 13) M und M_2 die Krümmungsmittelpunkte der Kurven (A) und der Evolute von (B), so findet man den Krümmungsmittelpunkt von (P), indem man durch die Punkte $M M_2$ und das Momentancentrum O einen Kreis legt, O mit P verbindet und zu O, P und dem Durchschnittspunkt D den vierten harmonischen (O zugeordneten) Punkt K'_2 sucht und $O K'_2$ halbiert. Der Halbierungspunkt K_2 ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt (cfr. Mannheim, Principes et developpements de géometrie cinématique, P. 33). Verbindet man nun A mit M_1 und fällt auf $A M_1$ die beiden Lote M F und M_2 G, ferner auf letzteres das Lot M H, so ist Winkel H M O = Winkel D O M also M H = O D, folglich auch O D = F G.

Bezeichnen wir noch A M mit ρ, A M_1 mit r, den Krümmungsradius $M_1 M_2$ der Evolute von (B) mit ρ'' und den Winkel O A M_1 mit α so folgt

$$O D = r - (\rho . \cos \alpha + \rho'' . \sin \alpha)$$

worin ρ'' positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem es mit M_1 A auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von M_1 P liegt, und $D P = \rho . \cos \alpha + \rho'' . \sin \alpha$

Aus der Lagebeziehung der Punkte O, K'_2 und D, P erkennt man nun leicht, daß, wenn D auf P O oder die Verlängerung dieser Linie über P hinaus fällt, K_2 auf P O liegt.

Fällt dagegen D in die Verlängerung von P O über O hinaus, so liegt K_2, wenn $D P < 2 . O P$ auf der Verlängerung von P O über O hinaus, dagegen, wenn $D P > 2 . O P$ auf der Verlängerung von O P über P hinaus.

Verlängern wir nun $P K_2$ um sich selbst bis K''_2 und tragen $P K_2''$ von B aus auf B J bis K_2''' ab, so ist nach der im § 2 gemachten Bemerkung der Krümmungsmittelpunkt K_1 der festen Kurve der vierte harmonische Punkt zu B, K_2''' und J.

Liegt also K_2''

1. auf der Strecke P O, so kehren die Kurven (P) und (S) der Linie B J die konkave Seite zu;
2. auf der Verlängerung von P O über O hinaus, so liegen beide Kurven auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangente;
3. auf der Verlängerung von P O über P hinaus, so kehren beide Kurven der Linie B J ihre konvexe Seite zu.

Für den Fall 1 ist

$$r > \rho . \cos \alpha + \rho'' \sin \alpha \quad \text{oder}$$
$$r - \rho'' . \sin \alpha > \rho . \cos \alpha$$

für den Fall 2 $\quad r < \rho . \cos \alpha + \rho'' \sin \alpha < 2 r \quad$ oder

$$r - \rho'' \sin \alpha < \rho . \cos \alpha \quad \text{und}$$
$$r - \frac{\rho''}{2} . \sin \alpha > \frac{\rho}{2} . \cos \alpha$$

für den Fall 3 $\quad 2 r < \rho . \cos \alpha + \rho'' . \sin \alpha \quad$ oder

$$r - \frac{\rho''}{2} . \sin \alpha < \frac{\rho}{2} . \cos \alpha$$

Zeichnen wir nun über ρ und $\frac{\rho}{2}$ als Durchmesser zwei Kreise und fällen noch von der Mitte $\mathfrak{M}$ der Geraden $M_1 M_2$ das

Lot $\mathfrak{M}Q$, so ergibt sich, daß Fall 1 eintritt, wenn G außerhalb des größeren Kreises liegt, der Fall 2 dagegen, wenn G innerhalb des kleineren liegt; der Fall 3 endlich tritt ein, wenn Q innerhalb des kleineren Kreises liegt.

Die Kurve P hat einen Wendepunkt, wenn O in der Mitte von D und P liegt, da dann OK'_2 und somit auch OK_2 unendlich groß wird: für diesen Fall ist $2r = \rho \cdot \cos\alpha + \rho'' \cdot \sin\alpha$ d. h. Q fällt in die Peripherie des kleineren Kreises.

Der Krümmungsradius von (S) wird unendlich groß, wenn J in der Mitte zwischen B und K_2''' liegt, also K_2 mit J zusammenfällt: dies tritt ein, wenn $DP = OP$ oder $r = \rho \cdot \cos\alpha + \rho'' \cdot \sin\alpha$: G und F müssen also zusammenfallen, d. h. G auf der Peripherie des größeren Kreises liegen.

Für die Krümmungsradien der Kurven (S) und (P) selbst ergeben sich nach Obigem die Werte:

$$\rho_1 = \frac{r^2}{\rho \cdot \cos\alpha + \rho'' \cdot \sin\alpha - r}$$

$$\rho_2 = \frac{r^2}{2r - (\rho \cdot \cos\alpha + \rho'' \cdot \sin\alpha)}$$

§ 9. **Spezialfälle.**

1. Reduziert sich die Kurve (A) auf einen Punkt P, so kommt die Bewegung von (B) auf eine Rotation um diesen Punkt hinaus. Die Normale (Fig. 14) der Kurve (B) im Punkt B, in welchem letztere durch eine zu g parallele Tangente berührt wird, berühre die Evolute von (B) im Punkte E. Man kann (S) dadurch erzeugt denken, daß man die Evolute der Kurve (B) um den Punkt A rotieren und gleichzeitig eine Tangente so auf ihr rollen läßt, daß letztere immer senkrecht zu g bleibt: die Kurve (S) ist die Bahn eines auf dieser Tangente bestimmten Punktes B.

Eine auf diese Weise entstandene Kurve kann aber offenbar auch dadurch erzeugt werden, daß die Evolute der Kurve (B) auf einer in A zu g senkrechten Geraden g_1 rollt. Zieht man nämlich durch S (resp. B) eine Parallele zu AE bis sie g_1 in E_1 schneidet, und trägt auf jedem der durch B gezogenen Strahlen ein Stück ab, welches dem durch A gehenden parallelen Radius-

vektor der Evolute gleich ist, so erhält man letztere in einer neuen Lage (E_1), in welcher sie g_1 berührt; rollt nun (E_1) auf g_1, so muß B offenbar die Kurve (S) beschreiben. Letztere ist daher in dem vorliegenden speziellen Falle eine Roulette, wie sie beim Abrollen einer ebenen Kurve auf einer Geraden erzeugt wird; desgleichen stellt sich die Kurve (P) als eine gewöhnliche Fußpunktenkurve dar, nämlich als diejenige des Punktes A in Bezug auf die Evolute der Kurve (B); zwischen den Kurven (P) und (S) besteht also die im § 1 gekennzeichnete Beziehung.

Denken wir uns nun die Ebene des Punktes A und der Kurve (B) um eine durch die Mitte von B P parallel zu g gezogene Achse um 180° gedreht, so fällt A in denjenigen Punkt von g_1, welchen diese Gerade mit der Fußpunktenkurve von (E_1) gemein hat, und (P) gelangt in eine Lage (P'), in welche diese Kurve auch durch die Drehung der Fußpunktenkurve von (E_1) um eine durch die Mitte von B A_1 parallel zu g_1 gezogene Achse um 180° gebracht werden kann; der Punkt A wird daher, wenn (P) auf (S) rollt, die zu g senkrechte Gerade g_1 beschreiben, und wir erhalten somit bei der vorliegenden Spezialisierung von (A) die bereits im § 3 behandelte Bewegung des ebenen Systems.

2. Als weiteren Spezialfall behandeln wir die Frage: Welche Beziehungen müssen zwischen den beiden Kurven (A) und (B) bestehen, damit (S) eine gerade Linie wird?

In diesem Falle ist (Fig. 15) der Krümmungsmittelpunkt K_2 der rollenden Kurve (P) der Wendepol und mithin der Fußpunkt M_1 des von K_2 auf B P gefällten Lotes der Krümmungsmittelpunkt von (B). Da nun der Winkel M_1 P K_2 im Laufe der rollenden Bewegung der Kurve (P) konstant bleibt, so muß die Gesamtheit der Punkte M_1, d. i. die Evolute von (B) eine Evolutoide von (P) sein. Sind nun zwei dieser Bedingung entsprechende Kurven (B) und (P) gegeben, so findet man den einem beliebigen Punkte B entsprechenden Punkt der Kurve (A), indem man den Winkel K_2 P M_1 in M_1 an M_1 P anträgt und den Schnittpunkt des freien Schenkels mit dem in P auf M_1 P errichteten Lote bestimmt. Dieser Schnittpunkt A ist gleichzeitig Fußpunkt des von K_2 auf P A gefällten Lotes und es folgt somit, daß (A) eben-

falls eine Evolutoide von (P) sein muß. Der Winkel, welchen die Tangenten dieser Evolutoide mit den Krümmungsradien von P bildet, ist entgegengesetzt gleich dem Komplementwinkel der ersteren Evolutoide.

3. Ist (B) gegeben und soll die Kurve (P) in eine gegebene Gerade übergehen, so ist als Kurve (A) die Enveloppe der Lote zu nehmen, die man auf den Tangenten an die Evolute der Kurve (B) in deren Schnittpunkten mit der Geraden (P) errichtet. Man findet zu einem beliebigen Punkte B (Fig. 16) von (B) den entsprechenden Punkt von (A), indem man auf (P) in dem Schnittpunkt dieser Geraden mit der Normale von (B) zum Punkte B ein Lot errichtet, um die Normale der Evolute von B in dem betreffenden Punkte E konstruiert. Man erhält dann (A) als Fußpunkt des vom Schnittpunkte O dieser Linien auf die durch P gehende Senkrechte zu E P gefällten Lotes.

Die Evolute von (B) sei zum Beispiel eine Parabel und (P) die Hauptachse derselben. Die Kurve (A) ist in diesem Falle eine Neil'sche Parabel, deren Spitze im Scheitel E_1 der Parabel (Fig. 17) liegt und deren Achse die entgegengesetzte Richtung als diejenige der Parabel hat.

Ist nämlich $y^2 = 2\,p\,x$ die Gleichung der Parabel, so erhält man für die Koordination ξ, η der Kurve (A)

$$\xi = XE_1 = E_1P + AC = 3x \qquad \text{und}$$

$$\eta = AX = OP - OC = (2x + p)\sqrt{\frac{2x}{p}} - \sqrt{2px} = \frac{2x}{p}\sqrt{2px}$$

also

$$27\,\eta^2\,p = 8\,\xi^3$$

Wir wollen nun die Kurve (S) bestimmen, indem wir für (B) diejenige Evolvente der Parabel wählen, welche durch Abwickelung des Bogens der letzteren von E_1 aus entsteht. Die Abscisse x von (S) von E_1 (dem Punkt von g, mit welchem während des Rollens der Neil'schen Parabel deren Spitze zusammenfällt) ausgerechnet, ist dann offenbar die Differenz des Bogens E_1 A und der Tangente A P. Die zugehörige Ordinate ist die Differenz zwischen der Länge der Parabeltangente E P und dem Parabelbogen E_1 E. Für die Bogenlänge E_1 A der Neil'schen Parabel ergibt sich der Wert

$$\text{arc } E_1 A = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \quad \text{ferner ist}$$

$$A P = \frac{2x}{\sqrt{p}}\sqrt{p + 2x} \qquad \text{also}$$

$$y = \sqrt{p\,(p + 2x)} = p$$

Nun ist aber $\sqrt{p\,(p + 2x)}$ die Länge der Parabelnormale E N zwischen der Kurve und der großen Achse genommen. Lassen wir auf der y-Achse eine Parabel rollen (Fig. 18), so beschreibt ihr Brennpunkt F bekanntlich eine Kettenlinie. Wählen wir nun den Punkt E'_1 der y-Achse, welcher hierbei mit dem Scheitel der Parabel zusammenfällt, als Anfangspunkt der Koordinaten und bezeichnen ferner den Punkt, in welchem die Hauptachse der Parabel die y-Achse schneidet mit Q, so ist $y = E'_1 Q$ und $x + p = E N$. Der entsprechende Punkt S wird also erhalten, wenn man vom Durchschnittspunkte K der durch N und Q gezogenen Parallelen aus auf K Q den Halbparameter p der Parabel abträgt. Die Gerade E F ist die Normale der Kettenlinie im Punkte F, da aber bekanntlich $F \hat{Q} E = F \hat{E} Q$ ist, so geht E F durch K und es ist F K = E F, d. h. K ist der Krümmungsmittelpunkt der Kettenlinie für den Punkt F. Die Kurve (S) ist also eine der Evolute der Kettenlinie kongruente Kurve; ihrer Lage nach erhält man dieselbe, indem man diese Evolute parallel der x-Achse um die Länge p nach der y-Achse hin verschiebt.

Während die Gerade (P) auf der Evolute der Kettenlinie rollt, berührt die Evolvente der Parabel fortwährend die Gerade g.

4. Ist (A) eine Kurve, welche (B) ähnlich und sich mit letzterer in Bezug auf den Punkt C in der Aehnlichkeitslage befindet $\left(\frac{C B}{C A} = \frac{m}{n}\right)$, so erhält man die Kurve (S), indem man die Normalen der von C erzeugten Roulette — zwischen der Kurve und der Geraden g genommen — im Verhältnis m : n teilt. Ebenso ergiebt sich die Kurve (P), indem man das zwischen der Fußpunktenkurve des Punktes C in Bezug auf (A) und dem Berührungspunkte der Tangente an die Kurve (A) enthaltene Stück dieser Tangente im Verhältnis m : n teilt.

Rollt dann (P) auf (S), so wird (B) die Gerade g berühren und C eine Kurve beschreiben, welche man erhält, wenn man die Ordinaten y der von C erzeugten Roulette über deren Fußpunkt hinaus um $y \cdot \frac{m}{n}$ verlängert.

5. Liegen die Kurven (A) und (B) auf einer dritten Kurve (C), welche einen Mittelpunkt besitzt, so liegt der Berührungspunkt der zu g parallelen Tangente symetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt von (C) mit dem Berührungspunkt von g. Man erhält daher die Kurve (S), indem man die Normalen der vom Mittelpunkte M beim Rollen der Kurve (C) auf g erzeugten Roulette um sich selbst über M hinaus verlängert. Desgleichen erhält man die verallgemeinerte Fußpunktenkurve, indem man zuerst die gewöhnliche Fußpunktenkurve in Bezug auf den Punkt M bildet und sodann das zwischen dem Berührungspunkte mit (C) und der ersteren enthaltene Stück der Tangente um sich selbst verlängert.

Läßt man diese beiden Kurven aufeinander rollen, so beschreibt M wieder dieselbe vorher von diesem Punkte erzeugte Kurve, aber (C) gleitet jetzt längs der Geraden g und nimmt nacheinander Lagen ein, die symmetrisch sind zu denjenigen, welche diese Kurve beim Rollen auf g durchlief.

10 **Enveloppe einer zu g senkrechten Geraden g_1 bei der durch Rollen von (S) auf (P) definierten Bewegung.**

Rollt (S) auf (P), so wird die mit ersterer Kurve fest verbundene Gerade g die jetzt ruhende Kurve (B) beständig berühren und eine zu ihr senkrechte Gerade g_1 wird eine Kurve (G_1) einhüllen, deren Krümmungsmittelpunkt wir zunächst bestimmen wollen.

Der Punkt G_1, in welchem die Gerade g_1 ihre Enveloppe berührt, ist der Fußpunkt des vom Momentanzentrum M auf g_1 gefällten Lotes; auf letzterem liegt der Krümmungspunkt der Enveloppe, nämlich im Durchschnitt desselben mit dem Wendekreis der umgekehrten Bewegung, welche durch Rollen von (P) auf (S) definiert wird.

Das Lot, welches von M auf g_1 gefällt ist, berührt selbstverständlich die mit (B) fest verbundene Kurve (A). Ist A' der

Berührungspunkt, so findet man den Punkt A auf g, welchem der Punkt M der Kurve (S) entspricht, indem man von A' auf g ein Lot fällt. Nach § 8 liegt der Wendepol der oben charakterisierten Bewegung auf dem in A auf g errichteten Lote, also ist A' der Durchschnitt der Normale $M G_1$ mit dem Wendekreis. Der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe der Geraden g_1 ist also derjenige Punkt, in welchem die Normale die Kurve (A) berührt, oder mit anderen Worten, die Enveloppe der Geraden g_1 ist eine Evolvente der Grundkurve (A).

Wird nun die Bewegung eines Systems dadurch definiert, daß eine Gerade g desselben eine Kurve (B) und eine zu ersterer senkrechte Gerade g_1 eine Kurve (C) berührt, so hat man, um (S) und (P) in der oben angegebenen Weise zu erhalten, als Grundkurve (A) die Evolute der Kurve (C) zu wählen, letztere auf einer Geraden g rollen zu lassen und in jeder Lage an (B) die zu g parallelen Tangenten zu ziehen, bezw. von jedem Punkte der Kurve (B) auf die ihrer Tangente in diesem Punkte parallelen Tangente an die Evolute von C ein Lot zu fällen. Die Berührungspunkte im ersten Falle, die Fußpunkte der Lote im zweiten erzeugen die Kurven (S) und (P).

Ebenso kann man zu diesen beiden Kurven gelangen, indem man die Evolute von (B) auf einer Geraden rollen läßt, und dann mit (C) wie vorher mit (B) verfährt.

Da die Bewegung des Systems durch die oben angeführten Bedingungen vollständig bestimmt ist, so müssen die Kurven, die man auf die eine oder die andere Weise erhält, kongruent sein. In der Tat kann man sich hiervon leicht auf direktem Wege überzeugen. Denn sind (Fig. 19) die Kurven (D) und (D_1) und ihre Evoluten (E) und (E_1) gegeben, so gelangt man Punkt für Punkt zu der nämlichen Kurve (P), wenn man entweder auf die eine an (E) gezogene Tangente von dem Berührungspunkte B der parallelen Tangente an (D) das Lot B P fällt, oder wenn man an (E_1) in A_1 eine Tangente zieht, und von dem Berührungspunkte B der ihr parallelen Tangente an (D) ein Lot fällt.

Auch die Kurven (S) und (S_1) müssen miteinander übereinstimmen, denn sowohl die Normale von (S) im Punkte B_1, als

auch diejenige von (S_1) im Punkte B ist parallel der Linie $A A_1$: ferner sind die zu den Punkten B und B_1 gehörigen Bogenelemente der Kurven S_1 und S einander gleich, nämlich dem entsprechenden Elemente der Kurve (P) bezw. (P_1). Beide Kurven stimmen daher in Bezug auf Richtung und Länge der Bogenelemente überein: die eine muß daher durch Parallelverschiebung in die andere übergeführt werden können.

Reduziert sich (A) auf einen Punkt, so ergibt sich aus Obigem unmittelbar der im § 9 direkt abgeleitete Satz, daß (S) eine gewöhnliche Roulette ist, welche durch Rollen der Evolute von (B) auf einer zu g senkrechten Geraden erhalten werden kann.

§ 10. Verallgemeinerung des im § 4 aufgestellten Satzes.

Die im § 4 angegebene Erzeugungsweise zweier Kurven, welche der Bedingung genügen, daß, wenn die eine auf der anderen rollt, ein bestimmter Punkt des mit ersterer verbundenen Systems eine gerade Linie beschreibt, läßt sich für den Fall, daß eine ebene Kurve beständig eine gerade Linie berühren soll, in folgender Weise erweitern:

Wir denken uns in einer Ebene zwei Kurven (A_2) und (B) gegeben und auf jeder Normale von (B) von dem auf ihr liegenden Krümmungsmittelpunkte K aus eine Strecke abgetragen, welche dem ihr parallelen Krümmungsradius $M A_2$ der Kurve (A_2) geometrisch gleich ist; die von den Endpunkten D, D' . . . . . gebildete Kurve bezeichnen wir mit (D).

Ferner lassen wir die Kurve (A_2) auf einer Geraden g rollen, bestimmen in jeder Lage den zum jeweiligen Berührungspunkt der Kurve (A_2) und der Geraden g gehörigen Krümmungsmittelpunkt von (A_2) und tragen von letzterem aus auf dem Krümmungsradius $M A_2$ eine Strecke ab, welche dem parallelen Krümmungsradius K B der Kurve (B) geometrisch gleich ist. Die Endpunkte E, E' . . . . . bilden eine zweite Kurve (E), deren Bogen wie jetzt gezeigt werden soll, gleich dem zwischen entsprechenden Punkten enthaltenen Bogen der Kurve (D) ist.

Sind nämlich (Fig. 20) K und K' zwei aufeinander folgende Punkte der Evolute von (B) und K D bezw. K' D' gleich den parallelen Krümmungshalbmessern $\mathbf{M A_2}$ und $\mathbf{M' A'_2}$ von (A_2), die wir mit ρ bezw. $\rho + d\rho$ bezeichnen, und die, wie wir zunächst annehmen wollen, mit denjenigen von (B) gleich gerichtet seien, so ergibt sich für das Bogenelement der Kurve (D) (unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung)

$$D D' = \sqrt{\rho^2 d\alpha^2 + [\rho + d\rho - \bar{\rho}_1 . d\alpha - \rho]^2}$$
$$= \sqrt{\rho^2 d\alpha^2 + (d\rho - \bar{\rho}_1 d\alpha)^2} = d\alpha \sqrt{\rho^2 + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2}$$

worin $d\alpha$ den Kontingenzwinkel der Kurve (A_2) bezw. (B) und ρ_1 bezw. $\bar{\rho}_1$ die Krümmungshalbmesser der Evoluten dieser Kurven bedeuten.

Die Größen ρ_1 und $\bar{\rho}_1$ sind hierbei positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem die Richtung derselben (von dem betreffenden Punkte der Evolute nach dem Krümmungsmittelpunkte zu gerechnet) derjenigen des Elementes der Kurve (A_2) entgegengesetzt oder gleich ist.

Für das Bogenelement der Kurve (E) erhält man, wenn wir noch den Krümmungshalbmesser von (B) im Punkte B mit $\bar{\rho}$ bezeichnen

$$E E' = \sqrt{\rho^2 d\alpha^2 + [\rho + d\rho - (\bar{\rho} + \bar{\rho}_1 d\alpha) - (\rho - \bar{\rho})]^2}$$
$$= \sqrt{\rho^2 d\alpha^2 + (d\rho - \bar{\rho}_1 d\alpha)^2} = d\alpha \sqrt{\rho^2 + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2}$$

welcher Ausdruck mit dem obigen übereinstimmt.

Sind die parallelen Krümmungsradien der Kurven (A_2) und (B) entgegengesetzt gerichtet, so ergibt sich für das Element beider Kurven der Wert

$$D D' = E E' = \sqrt{\rho^2 d\alpha^2 + (d\rho + \bar{\rho}_1 d\alpha)^2} = d\alpha \sqrt{\rho^2 + (\rho_1 + \bar{\rho}_1)^2}$$

Der Winkel μ, welchen die Tangente an die Kurve (D) im Punkte D mit bildet, bestimmt sich durch die Relation:

$$\text{tang } \mu = \frac{\rho . d\alpha}{\rho + d\rho - \rho - \bar{\rho}_1 d\alpha} = \frac{\rho}{\rho_1 - \bar{\rho}_1}$$

für den Fall, daß ρ und $\bar{\rho}$ parallel und gleichgerichtet bezw. durch

$$\text{tang } \mu = \frac{\rho}{\rho_1 + \bar{\rho}_1}$$

falls dieselben parallel und entgegengesetzt gerichtet sind. Den gleichen Wert findet man für die Tangente des Winkels ν, welchen eine in E an die Kurve (E) gezogene Tangente mit der Ordinate E A bildet.

Bringen wir nun die Kurve (D) so mit (E) in Berührung, daß das Element D D' mit dem Element E E' zusammenfällt und D B mit $E A_2$, so wird die Kurve (B) die Gerade g berühren, und ein Gleiches muß stattfinden, wenn (D), ohne zu gleiten, auf (E) rollt.

Von denselben beiden Kurven (A_2) und (B) ausgehend, gelangt man zu einem zweiten, diese Bedingung erfüllenden Kurvenpaare (D') und (E'), indem man bei der Konstruktion von (D') auf der Normale von (B), bei der Konstruktion von (E') auf der Ordinate $M A_2$ die Strecken $M A_2$ bezw. K B in entgegengesetzter Richtung, als dies oben geschehen, abträgt.

Man findet nämlich für den ersten der oben unterschiedenen Fälle, daß

$$D D' = E E' = \sqrt{\rho^2 d\alpha^2 + (d\rho + \bar{\rho}_1 d\alpha)^2}$$
$$= d\alpha \sqrt{\rho^2 + (\rho_1 + \bar{\rho}_1)^2}$$

und für den zweiten

$$D D' = E E' = \sqrt{\rho^2 d\alpha^2 + (d\rho - \bar{\rho}_1 d\alpha)^2}$$
$$= d\alpha \sqrt{\rho^2 + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2}$$

ebenso

$$\text{tang } \mu = \text{tang } \nu = \frac{\rho}{\rho_1 + \bar{\rho}_1}$$

beziehentlich

$$\text{tang } \mu = \text{tang } \nu = \frac{\rho}{\rho_1 - \bar{\rho}_1}$$

§ 11. Behandlung einiger Spezialfälle.

1. Reduziert sich die Kurve (A_2) auf einen Punkt, so ist (D) die Evolute von (B) und (E) eine zu g senkrechte Linie: man erhält also in diesem Falle den speziellen Satz, daß eine Kurve beständig eine gerade Linie in einem bestimmten Punkte berührt, wenn ihre Evolute auf einem in diesem Punkte auf der Geraden errichteten Lote, ohne zu gleiten, rollt.

2. Ist (A_2) eine der Kurve (B) kongruente Kurve und durch Parallelverschiebung in letztere überführbar, so ist, wenn man die erste der im vorigen Paragraphen behandelten Erzeugungsweisen wählt, (D) die Kurve (B) selbst und (E) die gerade Linie g; wir erhalten also den speziellen Fall, in welchem (B) auf g, ohne zu gleiten, rollt.

3. Welche Beziehungen müssen zwischen (A_2) und (B) bestehen, damit gleichzeitig ein mit letzterer Kurve fest verbundener Punkt P eine zu g senkrechte gerade Linie g_1 beschreibt?

Nach § 3 entstehen (E) und (D) als Roulette und Fußpunktenkurve, wenn man als Grundkurve (A) die Evolute von (B) wählt. Um (D) auf die im vorigen Paragraphen erwähnte Art zu erzeugen, müßte man die Kurve (A_2) so bestimmen, daß RA' (Fig. 21) gleich dem parallelen Krümmungsradius von (A_2) ist. Nach § 5 ist nun RA gleich dem Krümmungsradius der Evolute der Kurve (A_1), welche nach der im § 4 beschriebenen Erzeugungsweise zu derselben Kurve führt, welche durch den Punkt P erzeugt wird, wenn die Evolute von (B) auf einer Geraden rollt.

Nimmt man diese Evolute von (A_1) als Kurve (A_2), so ergibt sich auch (R) als Kurve (E); denn es ist $BR = \varrho - \bar{\varrho}$ und ferner die Projektion von RR' auf g gleich $\varrho \,.\, d\alpha$.

4. Welchen Bedingungen muß die Kurve (B) genügen, damit bei gegebener Kurve (A_2) die Kurve (E) eine gerade Linie g_1 wird, welche mit g den Winkel α bildet?

Der Krümmungsmittelpunkt O von (D) (Fig. 22) ist der Wendepol, seine Projektion M auf BE also der Krümmungsmittelpunkt von (B). ME ist die Länge des MB parallelen Krümmungsradius von (A_2) und es ist für jede Lage

$$\varrho = R_1 \,.\, \cos \alpha$$

wenn R_1 den Krümmungsradius der Kurve (D) bezeichnet. Es ergibt sich daraus, daß die Kurve (D) der Kurve (A_2) ähnlich ist. Ist daher (A_2) gegeben, so hat man zunächst die ähnliche Kurve (D) zu konstruieren und letztere in eine solche Lage zu bringen, daß zwei entsprechende Krümmungsradien denselben Winkel wie g_1 und g bilden.

Man findet dann (M) als Evolutoide dieser Kurve und endlich (B) als Evolvente von (M).

5. Die Kurve (A_2) sei die Evolute der Kurve

$$y = p \,.\, \log \sec \frac{x}{p}$$

und (B) die Evolvente einer Parabel, deren Achse die Richtung der negativen y-Achse des Koordinatensystems hat, auf welches obige Gleichung bezogen ist und deren Parameter die Länge p hat. (Fig. 23).

Für die Kurve $y = p \,.\, \log \sec \frac{x}{p}$ ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \frac{x}{p} \,;\; \frac{ds}{dx} = \sec \frac{x}{p} \,;\; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{p \,.\, \cos^2 \frac{x}{p}}$$

daher für den Krümmungsradius

$$r = \frac{p}{\cos \frac{x}{p}}$$

Für die Koordinaten u, v des Krümmungsmittelpunktes bezw. eines Punktes der Kurve (A_2) findet man hieraus:

$$u = x - r \,.\, \frac{dy}{ds} = x - p \,.\, \operatorname{tang} \frac{x}{p}$$

$$v = y + r \,.\, \frac{dx}{ds} = p \,.\, \log \sec \frac{x}{p} + p$$

Bezeichnen wir nun die Winkel, welche die Tangente und die Normale der Kurve $y = p \log \sec \frac{x}{p}$ mit der positiven x-Achse bilden, mit φ bezw. ψ, so folgt

$$r = \frac{p}{\cos \varphi} = \frac{p}{\sin \psi}$$

woraus sich für den Krümmungsradius ρ von (A_2) der Wert ergibt

$$\rho = \frac{dr}{d\psi} = - p \,.\, \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi}$$

Für das Stück t einer zu ρ parallelen Tangente an die oben bezeichnete Parabel, welches durch deren Berührungspunkt und

ihren Schnittpunkt mit der Verlängerung der Achse begrenzt wird, ergibt sich:

$$t = \frac{p \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi};$$

daher fallen die Punkte D, wenn man die Krümmungsradien von (A_2) auf den Tangenten der Parabel von deren Berührungspunkten aus in der Richtung nach den betreffenden Punkten der Evolvente abträgt, sämtlich in die Verlängerung der Parabelachse.

Die Kurve (A_2) bildet im Punkte $x = o$, $y = p$ eine Spitze; die Länge ihres Bogens von dieser Spitze ab gerechnet, ist

$$r - p = p \cdot \frac{\sin^2 \varphi_2}{\cos \varphi}$$

die Länge des Parabelbogens vom Scheitel bis zum Berührungspunkte der Tangente gerechnet, hat bekanntlich den Wert:

$$\frac{t}{2} + \frac{p}{2} \log \operatorname{cotg} \frac{R - \varphi}{2};$$

mithin ist die zu einer Ordinate $\rho - p$ der Kurve (E) gehörende Abscisse:

$$-\frac{t}{2} + \frac{p}{2} \cdot \log \operatorname{cotg} \frac{R - \varphi}{2}; \quad \text{oder}$$

$$\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \log \operatorname{cotg} \frac{R - \varphi}{2} \right)$$

Betrachten wir nun eine Kettenlinie mit dem Parameter $\frac{p}{2}$, so können wir deren Gleichung bekanntlich, wie folgt, schreiben

$$x = \frac{p}{2} \cdot \log \operatorname{tang} \frac{R - \varphi}{2}$$

$$y = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\cos (R - \varphi)}$$

worin φ den Winkel bedeutet, den die Tangente mit der Direktrix bildet. Für die Koordinaten ihrer Evolute ergibt sich hieraus

$$\xi = x - \frac{y}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \frac{p}{2} \left(\log \cos \frac{R - \varphi}{2} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right)$$

$$\eta = 2y = \frac{p}{\cos \varphi},$$

oder, wenn man die Abscissenachse durch die Spitze der Evolute legt,

$$\eta = p \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

Wir finden daher in Uebereinstimmung mit dem im § 9, No. 3 erhaltenen Resultat, daß die Kurve (E) die Evolute einer Kettenlinie ist.

12. Die Krümmungsradien der Kurven (D) und (E).

Bezieht man die Kurve (E) auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem dessen x-Achse die Gerade g ist und setzt $EA = y$, so ist der Krümmungsradius von (E)

$$R = \frac{\overline{EE'^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ worin } EE' \text{ den Wert } d\alpha \sqrt{\rho^2 + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2} \text{ haben soll.}$$

Aus den Relationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho_1 - \bar{\rho}_1}{\rho} \text{ und } \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\rho} \text{ sowie}$$

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \rho_1; \quad \frac{d\rho_1}{d\alpha} = \rho_2; \quad \frac{d\bar{\rho}_1}{d\alpha} = \bar{\rho}_2$$

folgt nun

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\rho \cdot (\rho_2 - \bar{\rho}_2) - \rho_1 (\rho_1 - \bar{\rho}_1)}{\rho^3}$$

und somit

$$R = \frac{[\rho^2 + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2]^{\frac{3}{2}}}{\rho (\rho_2 - \bar{\rho}_2) - \rho_1 (\rho_1 - \bar{\rho}_1)}$$

worin die Krümmungsradien der zweiten Evoluten positiv oder negativ zu nehmen sind, jenachdem sie mit ρ entgegengesetzt oder gleich gerichtet sind. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die Tangente in E mit g bildet, mit ν und den Krümmungsradius von (D) mit R_1, so ist bekanntlich

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{\cos \nu}{\rho} = \sqrt{\rho^2 + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2}$$

daher

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\rho^2 + 2\rho_1^2 + \bar{\rho}_1^2 - 3\rho_1 \cdot \bar{\rho}_1 - \rho \cdot \rho_2 + \rho \cdot \bar{\rho}_2}{[\rho^2 + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$R_1 = \frac{[\rho^2 + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + \rho_1 (\rho_1 - \bar{\rho}_1) + (\rho_1 - \bar{\rho}_1)^2 - \rho (\rho_2 - \bar{\rho}_2)}$$

Ist in Fig. 24 $K_1E = \varrho_1$, $K_1L = \bar{\varrho}_1$, so ist das von E auf LA_2 gefällte Lot die Tangente der Kurve (E) im Punkte E; dieselbe schneidet den Krümmungsradius K_1K_2 der zweiten Evolute von (A_2) im Punkte Q. Trägt man nun noch $\bar{\varrho}_2$ von K_2 aus auf K_1K_2 ab, so ist der Abstand des Endpunktes N von Q

$$NQ = \varrho_2 - \varrho_2 - K_1Q = \varrho_2 - \bar{\varrho}_2 - \varrho_1 \frac{\varrho_1 - \bar{\varrho}_1}{\varrho}$$

und, wenn man von N auf die Normale EH das Lot NG fällt,

$$EG = \frac{\varrho(\varrho_2 - \bar{\varrho}_2) - \varrho_1(\varrho_1 - \bar{\varrho}_1)}{\varrho}$$

Bestimmt man nun zu G den in Bezug auf den Punkt E symmetrischen Punkt J so folgt mit Hülfe der analogen Ueberlegungen wie auf Seite 15.

$$R = \frac{EQ^2}{EJ}$$

Wir finden also den Krümmungsmittelpunkt von (E), indem wir EH über E hinaus um sich selbst bis E′ verlängern, und dann zu H, J, E′ den vierten J zugeordneten harmonischen Punkt suchen.

Dasselbe Verfahren gilt für die Fälle, in denen

$$EE' = d\alpha \sqrt{\varrho^2 + (\varrho_1 + \bar{\varrho}_1)^2} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{\varrho}{\varrho_1 + \bar{\varrho}_1} \text{ ist.}$$

Mit Hülfe dieser Resultate kann man nun bezüglich des relativen Kontingenzwinkels der beiden Kurven (D) und (E) analoge Betrachtungen wie im § 6 anstellen.

Uebergang zur sphärischen Bewegung. § 13.

Für die Bewegung eines sphärischen Systems kann man die Frage aufwerfen: Welche Beziehungen müssen zwischen den beiden spärischen Kurven (c) und (ρ) resp. den durch sie bestimmten Kegeln (C) und (Γ) bestehen, damit, wenn (ρ) auf (c), ohne zu gleiten, rollt, ein mit dieser Kurve fest verbundener, derselben Kugelfläche angehörender Punkt P einen größten Kreis beschreibt? Wir gelangen zu derartigen Kegelpaaren durch folgendes, das im § 4

für die ebene Bewegung dargelegte, als speziellen Fall enthaltende Verfahren:

Auf einer Ebene E lassen wir einen Kegel (A) rollen, von dem wir der Einfachheit halber voraussetzen wollen, daß er keine Wendekanten besitzt. In jeder Lage desselben denken wir uns die Achse des zur Berührungserzeugenden t gehörenden Oskulationskegels konstruiert. Dieselbe liegt in einer durch t senkrecht zu E gelegten Ebene e und bildet mit t einen Winkel H, für welchen

$$\operatorname{tang} H = \frac{d\sigma}{d\alpha}$$

ist, wenn man mit $d\sigma$ den Winkel zweier aufeinanderfolgender Erzeugenden und mit $d\alpha$ den Winkel zweier aufeinanderfolgenden Tangentialebenen des Kegels (A) bezeichnet.

Eine, um den mit der Spitze des Kegels zusammenfallenden Punkt O der Ebene E mit dem Radius 1 beschriebene Kugel wird von den Achsen C, C′, C″ ..... der Oskulationskegel in den Punkten c, c′, c″ ..... geschnitten, deren Gesamtheit die Kurve (c) bildet. Der einem Winkel H entsprechende Bogen ist dann der sphärische Krümmungsradius der dem Kegel (A) und der Kugel gemeinsamen Kurve (a). Die den sphärischen Krümmungsradien von (a) gleichen sphärischen Ordinaten der Kurve (c) liegen auf größten Kreisen, die sich in den der Ebene E als Aequatorialebene entsprechenden Polen schneiden. Bezeichnet man denjenigen mit N, durch welchen die sphärischen Verlängerungen über die Punkte c hinaus gehen, so folgen für einen in O befindlichen sehenden Punkt die durch N gehenden größten Kreise in entgegengesetztem Sinne aufeinander, in welchem die Drehung der Kurve (a) erfolgt.

Wir ziehen nun durch einen beliebigen Punkt P der Kugeloberfläche sphärische Radiivectoren, welche gleich den sphärischen Krümmungsradien der Kurve (a) sind und von denen zwei unendlich benachbarte den gleichen Elementarwinkel mit einander bilden, wie die beiden entsprechenden Tangentialebenen des Kegels (A), jedoch, von O aus gesehen, in umgekehrtem Sinne aufeinanderfolgend als die durch N gehenden entsprechenden größten Kreise, d. h. im Sinne der Rotation der Kurve (a). Die Endpunkte dieser

sphärischen Radiivectoren bilden eine zweite Kurve, die wir mit (γ) bezeichnen. Der Winkel zwischen zwei in endlicher Entfernung von einander liegenden Radiivectoren ist gleich dem Winkel, welcher von den entsprechenden Erzeugenden des Polarkegels gebildet wird, wenn man letzteren in eine Ebene abwickelt. Wir wollen nun zeigen, daß das Bogenelement $c\,c'$ der Kurve (c) gleich demjenigen der Kurve (γ) ist.

Sind ρ und $\rho + d\rho$ zwei aufeinanderfolgende sphärische Krümmungsradien der Kurve (a) und $d\sigma$ der Winkel zwischen den entsprechenden Erzeugenden des Kegels, so ist das Bogenelement

$$c\,c' = \sqrt{d\sigma^2 \,.\, \cos\rho^2 + d\rho^2}$$

Für das Bogenelement der Kurve (γ) findet man, wenn man noch mit $d\alpha$ den Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tangentialebenen des Kegels (A) bezeichnet

$$\gamma\,\gamma' = \sqrt{d\alpha^2 \sin\rho^2 + d\rho^2}$$

welcher Ausdruck wegen der bekannten Relation

$$\operatorname{tang}\rho = \operatorname{tang} H = \frac{d\sigma}{d\alpha}$$

in den ersteren übergeht.

Ebenso ist der Winkel μ, welchen das Bogenelement der sphärischen Kurve (c) mit der sphärischen Ordinate des Punktes c bildet, gleich dem Winkel zwischen dem Bogenelement der Kurve (γ) und dem sphärischen Radiusvector $P\,\gamma$: denn es ist

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{d\sigma}{d\rho} \,.\, \cos\rho = \frac{d\,\alpha}{d\rho} \,.\, \sin\rho = \operatorname{tang}\nu$$

Wir bringen nun die sphärische Kurve (γ) in eine solche Lage, daß γ mit dem entsprechenden Punkt c und der Punkt P mit a zusammenfällt: dann werden auch die einander entsprechenden Teile der Tangenten zusammenfallen. Gelangt nun (γ) infolge der Elementarrotation in die nächstfolgende Lage, so wird γ' mit c' und $P\,\gamma'$ mit $c'\,a'$ zusammenfallen.

Man sieht daraus, daß, wenn (γ), ohne zu gleiten, auf (c) rollt, der Punkt P den durch die Ebene E auf der Kugel bestimmten größten Kreis beschreibt.

14. Erzeugung von windschiefen Achsenflächen (C) und (Γ) für die Bewegung eines mit (Γ) fest verbundenen Punktes auf einer beliebigen ebenen Kurve.

Anstatt des Kegels lassen wir jetzt auf der Ebene (E) eine abwickelbare Fläche (A) rollen, von der wir annehmen wollen, daß sie keine Wendekanten besitzt. In jeder Lage derselben denken wir uns zu demjenigen Punkte ihrer Gratlinie (G), welcher der Berührungserzeugenden t angehört, die rectificirende Gerade C konstruiert, die bekanntlich auch als Achse des oskulierenden Rotationskegels (confer. Schell, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, 1894, S. 34) angesehen werden kann. Dieselbe liegt in einer durch t gehenden, zu E senkrechten Ebene e und bildet mit ersterer einen Winkel H, für welchen

$$\operatorname{tang} H = \frac{d\tau}{d\alpha}$$

ist, wenn $d\tau$ den Kontingenzwinkel und $d\alpha$ den Schmiegungswinkel der Kurve (G) in dem betreffenden Punkte bedeutet. Die Gesamtheit dieser Geraden C bildet dann eine windschiefe Fläche, welche wir mit (C) bezeichnen.

Wir denken uns nun eine beliebige Gerade p und nehmen auf derselben einen beliebigen Punkt P an, welcher dem Punkt G entsprechen soll, in welchem die Kurve (G) bei einer gewissen Lage der Fläche (A) die Ebene E berührt. Die übrigen Punkte der Geraden p ordnen wir sodann denjenigen der Kurve (G) in der Weise zu, daß, wenn P_x und G_x zwei einander entsprechende Punkte bedeuten, $P_x P$ gleich dem Bogen $G_x G$ der Kurve (G) ist. G' sei nun der bei der nächstfolgenden Lage der Fläche (A) mit E zusammenfallende Punkt und P' der ihm entsprechende auf der Geraden p. Wir legen nun durch die Gerade p eine beliebige Ebene ε, sodann eine zweite ε', welche mit ersterer den gleichen Elementarwinkel bildet, wie die beiden den Punkten G und G entsprechenden Tangentialebenen der Fläche (A), und so fort, in der Weise, daß diese Ebenen für einen in der Richtung von P nach P' hin sehenden Punkt in demselben Sinne aufeinanderfolgen, in welchem, von G nach G' hin gesehen, die Drehung der Fläche (A) erfolgt. Wir ziehen nun in der Ebene ε durch P eine Gerade,

welche mit p (in der Richtung P P′ genommen) denselben Winkel bildet, wie die rektifizierende Gerade der Kurve (G) im Punkte G mit der Tangente derselben.

Entsprechende Gerade ziehen wir in den Ebenen ε', ε'' . . . und erhalten auf diese Weise eine geradlinige Fläche (Γ) mit einer Richtungsgeraden, deren Flächenelement, wie wir jetzt zeigen wollen, kongruent demjenigen der Fläche (C) ist.

Die durch t und die nächstfolgende Berührungserzeugende t′ senkrecht zu E gelegten Ebenen e und e′ bilden miteinander den Winkel $d\tau$, und es ergibt sich aus dem unendlich kleinen, als eben zu betrachtenden rechtwinkligen Dreieck, welches auf einer um G mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel durch die Gerade C, die durch G zur nächstfolgenden Geraden C′ gezogene Parallele C'_1, sowie durch diejenige, den Punkt G enthaltende Gerade bestimmt wird, welche, in e′ liegend, mit t′ den Winkel H einschließt für den Winkel $d\mu$ der beiden Geraden C und C′

$$d\mu^2 = dH^2 + \cos^2 H \,.\, d\tau^2$$

Den kürzesten Abstand der beiden Geraden C und C′ erhalten wir, wenn wir den Abstand der Geraden C′ bezw. des Punktes G′ von der durch C und C_1' gelegten Ebene berechnen. Bezeichnen wir nun mit ν den Neigungswinkel der Ebene C C_1' und derjenigen, welche senkrecht zu E durch t′ gelegt wurde, so ist

$$d\mu \,.\, \sin \nu = \cos H \,.\, d\tau$$

und folglich, wenn wir G G′ gleich ds setzen

$$dp = \sin H' \sin \nu \,.\, ds = \frac{ds \,.\, \sin H' \,.\, \cos H \,.\, d\tau}{d\mu}$$

oder mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$dp = \frac{ds \,.\, d\tau \,.\, \sin 2\,H}{2\,d\mu}$$

Ziehen wir nun durch den Punkt P der Geraden p eine Parallele Γ'_1, zu Γ′, sowie eine zweite Gerade, welche, in ε' liegend, mit p den Winkel H bildet, so erhalten wir auf einer um P mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel wiederum ein unendlich kleines

Dreieck, aus welchem man für den Winkel $d\bar{\mu}$ zwischen Γ und Γ' erhält:

$$d\bar{\mu}^2 = d\,H^2 + \sin^2 H \,.\, d\alpha^2$$

Der kürzeste Abstand $d\,\bar{p}$ der beiden Erzeugenden Γ' und Γ ist gleich der Länge des von P auf die durch Γ und Γ_1' bestimmte Ebene gefällten Lotes; dieses ist

$$ds \,.\, \sin H' \,.\, \sin \bar{\nu}$$

worin ν den von der Ebene ε' mit der Ebenen der Geraden Γ und Γ_1' gebildeten Winkel bezeichnet. Für den letzteren findet man

$$\sin \bar{\nu} = \frac{\sin H \,.\, d\alpha}{d\mu} \text{ also}$$

$$d\bar{p} = \frac{ds \,.\, \sin H \,.\, \sin H' \,.\, d\alpha}{d\mu_1}$$

Mit Hülfe der Relation $d\tau = \text{tang } H \,.\, d\alpha$ erhalten wir endlich

$$d\mu^2 = d\,H^2 + \cos^2 H \,.\, d\tau^2$$

$$d\bar{p} = \frac{ds \,.\, \sin H' \,.\, \cos H \,.\, d\tau}{d\mu} = \frac{ds \,.\, d\tau \,.\, \sin 2\,H}{2\,d\mu}$$

welcher Ausdruck mit den für $d\mu$ und $d\,p$ abgeleiteten übereinstimmen.

Wir wollen nun ferner zeigen, daß die Flächen (C) und (Γ) eine isogonale Striktion haben. Für die Entfernung a des Punktes G von dem Fußpunkte des kürzesten Abstandes auf C bezw. dem Durchschnittspunkte derselben mit der Striktionslinie findet man

$$a = \frac{dp \,.\, \text{cotg } \nu}{d\mu} \text{ oder } da$$

$$\text{cotg } \nu = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \nu}}{\sin \nu} = \frac{d\,H}{\cos H \,.\, d\tau}$$

$$a = \frac{dp \,.\, d\,H}{d\mu \,.\, \cos H \,.\, d\tau}$$

ebenso für die Entfernung $\bar{a}$ des Punktes P von dem Durchschnittspunkte der Geraden Γ mit der Striktionslinie der Fläche (Γ)

$$\bar{a} = \frac{dp \,.\, d\,H}{d\mu \,.\, \cos H \,.\, d\tau} \text{ , daher}$$

$$a = a$$

Die Fußpunkte des gemeinschaftlichen Lotes von C und C' seien E bezw. e, desjenigen von C' und C'' E' bezw. e', dann ergiebt sich für den Winkel w, welchen die Striktionslinie mit C' bildet,

$$\text{tang } w = \frac{e\,E'}{dp}$$

Fällen wir nun von G' auf C das Lot G' F, so ist E F bis auf eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung gleich e G', daher

$$e\ G' = a - ds \,.\, \cos H$$

Da ferner

$$e\ E' = a + da - e\ G' \text{ so folgt}$$

$$e\ E' = da + ds \,.\, \cos H \text{ und somit}$$

$$\text{tang } w = \frac{da + ds \,.\, \cos H}{dp}$$

Für den Winkel w', welchen die Striktionslinie von (Γ) mit Γ' bildet, findet man in annaloger Weise

$$\text{tang } w' = \frac{d\bar{a} + ds \,.\, \cos H}{dp}$$

welcher Ausdruck infolge der oben bewiesenen Identitäten mit demjenigen für tang w übereinstimmt.

Die Flächen (C) und (Γ) genügen somit den Bedingungen (confer. Schell, a. a. O. Band I, Seite 291), welche erfüllt sein müssen, damit die eine auf der andern, ohne daß ein Gleiten stattfindet, rollen kann, oder mit andern Worten, die eine kann aus der andern dadurch entstanden gedacht werden, daß sich die Flächenelemente um die Erzeugenden um unendlich kleine Winkel drehen, ohne daß eine Verschiebung längs den Erzeugenden stattfindet.

Wir bringen nun die Fläche (Γ) in eine solche Lage, daß P mit G, der zur Erzeugenden Γ gehörende Zentralpunkt E mit dem Zentralpunkt E für die Erzeugende C und ferner die Gerade p mit der Geraden t zusammenfällt. Da die Winkel, welche die

Ebenen ($C C_1'$) und ($\Gamma \Gamma_1'$) mit e bezw. E bilden, einander gleich sind, so fällt auch Γ_1' mit C_1' und folglich auch Γ' mit C' zusammen. Die beiden Flächen (Γ) und (C) haben somit das von C und C' bezw. Γ und Γ' gebildete Element gemein. Durch eine Elementarrotation um C' wird, wie leicht zu übersehen, Γ'' mit C'' und p mit t' zur Coincidenz gebracht. Während (Γ) auf (C) rollt, bleibt p fortwährend Tangente der Kurve (G), ohne daß hierbei eine gleitende Bewegung stattfindet. Ein Punkt P von p beschreibt somit eine Evolvente von (G).

Ist umgekehrt die Kurve (P) als Bahn des Punktes P gegeben, so werden entsprechende Flächenpaare (C) und (Γ) durch jede Fläche (A) erzeugt, deren Gratlinie bei der Abwickelung auf einer Ebene in die Evolute von (P) übergeht.

Lebenslauf.

Verfasser dieser Dissertation wurde geboren am 24. Dez. 1860 zu Kahla (Sachsen-Altenburg). Seine wissenschaftliche Vorbildung erhielt er auf der Erziehungsanstalt von Dr. Schaffner zu Gumperda b. Kahla sowie auf dem Realgymnasium der Frankeschen Stiftungen zu Halle a./S., welches er mit dem Zeugnis der Reife Ostern 1880 verliess, um Mathematik zu studieren. Nach vierjährigem Studium an den Universitäten Jena und Leipzig unterzog er sich im S. S. 1884 der Prüfung für Kandidaten des höheren Schulamts vor der Königl. Sächs. Prüfungskommission zu Leipzig, von welcher ihm die Lehrbefähigung für alle Klassen in der Mathematik und Physik zuerkannt wurde. Nachdem derselbe sodann zu Halle a./S. seiner Militärpflicht genügt hatte, wurde er vom Königl. Sächs. Ministerium des Kultus und öffentl. Unterrichts dem Realgymnasium zu Döbeln i./S. als Probekandidat überwiesen. Während des Probejahres legte er ein weiteres Examen ab, durch welches er die Lehrbefähigung in der Geographie für alle, im Französischen für mittlere Klassen erwarb.

Seit Beendigung des Probejahres ist derselbe im Versicherungsfache tätig gewesen und im Jahre 1897 von der „Allianz“ Versicherungs-Aktien-Gesellschaft in Berlin zu deren Prokuristen ernannt worden.

Fig. 1.

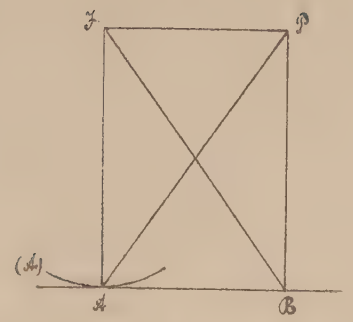
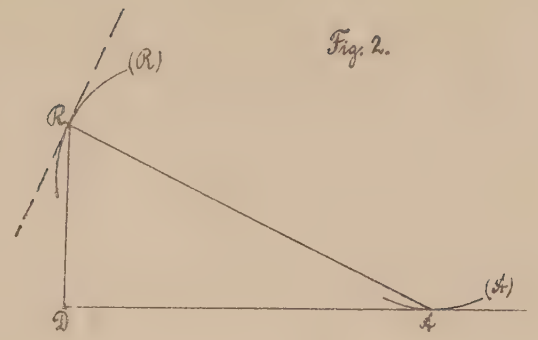


Fig. 2.



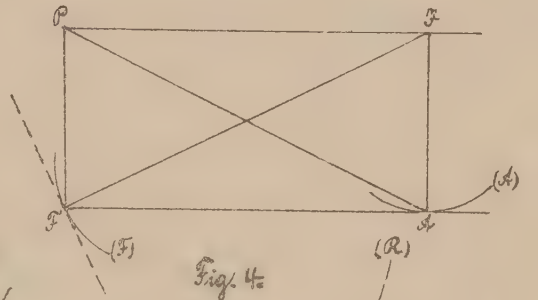


Fig. 3.

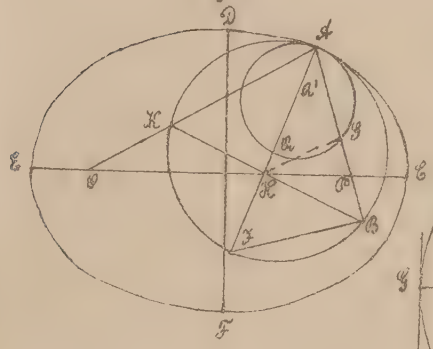


Fig. 4.

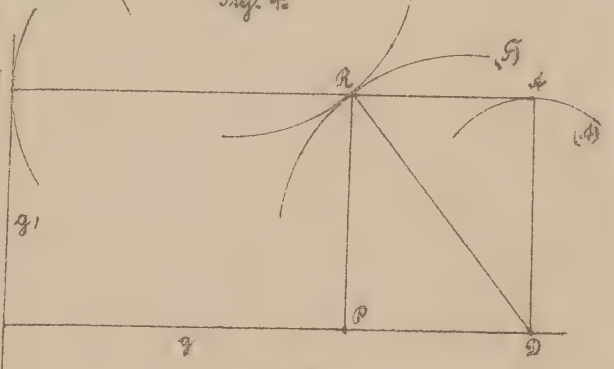


Fig. 5.

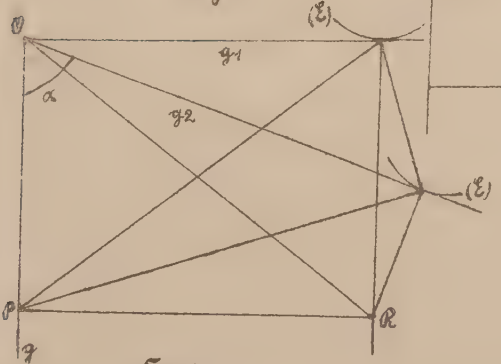


Fig. 6.

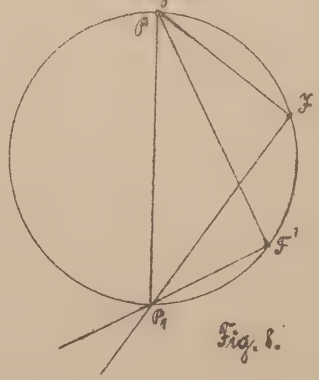


Fig. 7.

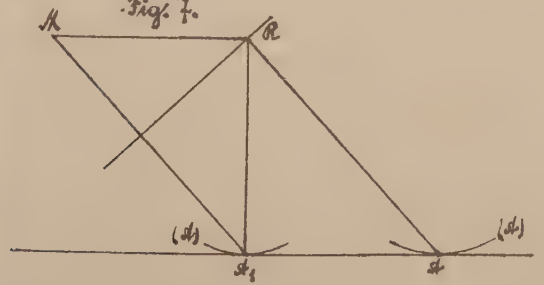


Fig. 8.

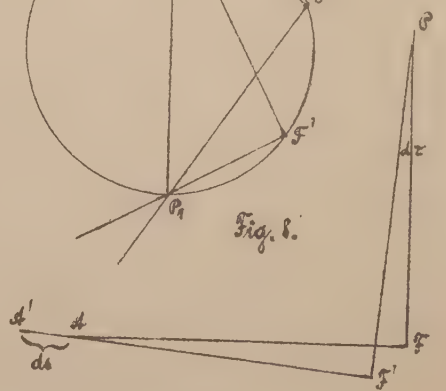


Fig. 9.

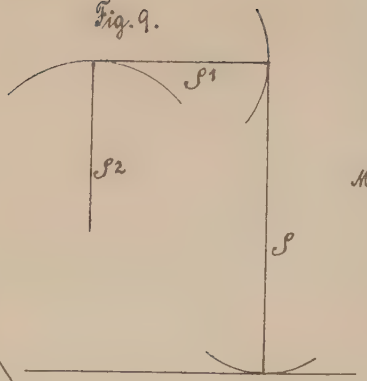


Fig. 10.

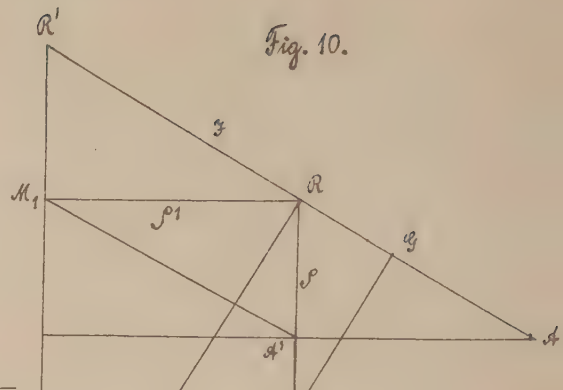


Fig. 11.

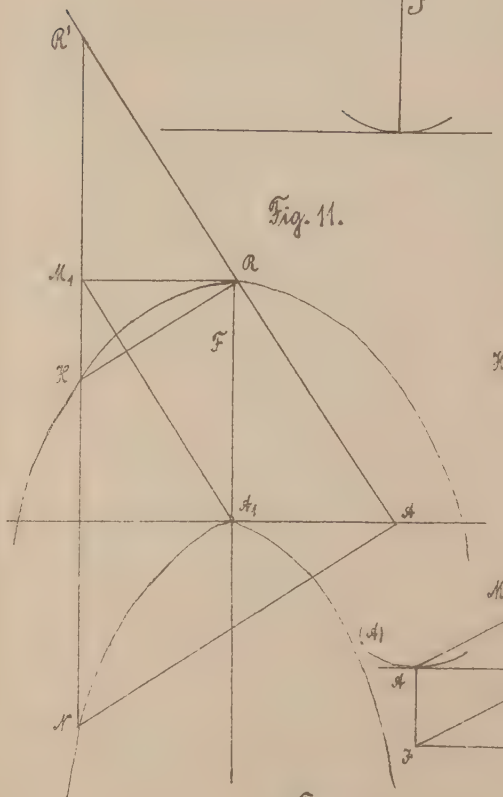


Fig. 12.

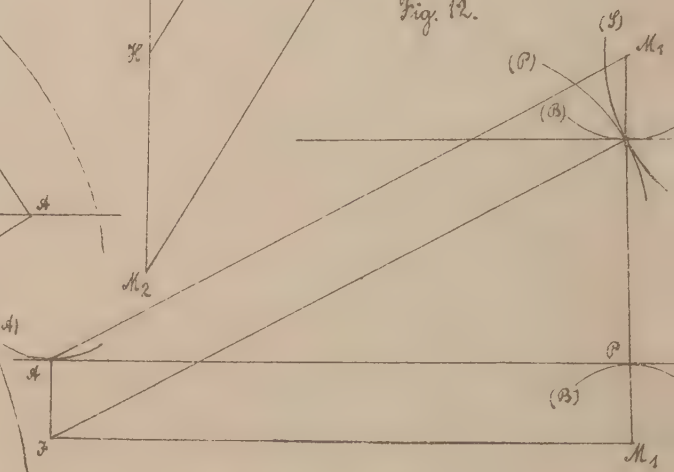


Fig. 13.

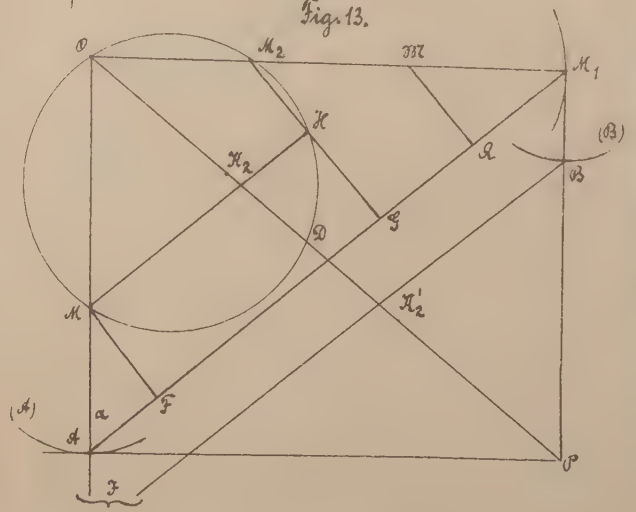


Fig. 14.

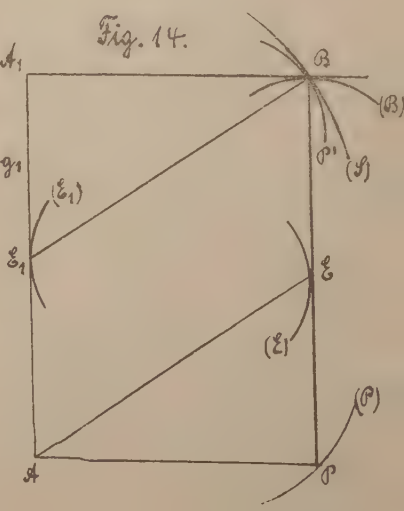


Fig. 15.

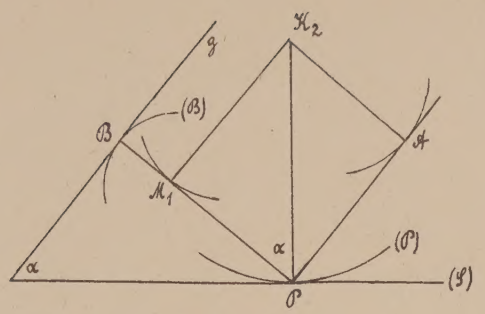


Fig. 16.

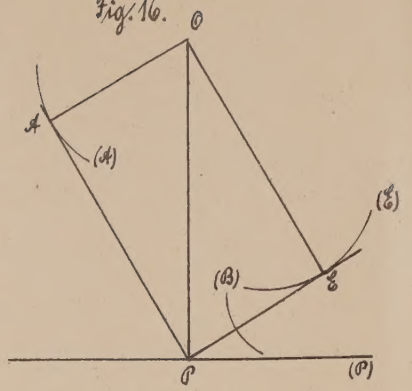


Fig. 17.

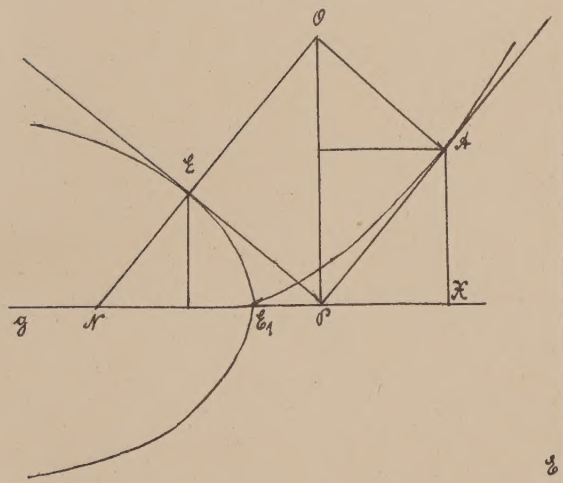


Fig. 18.

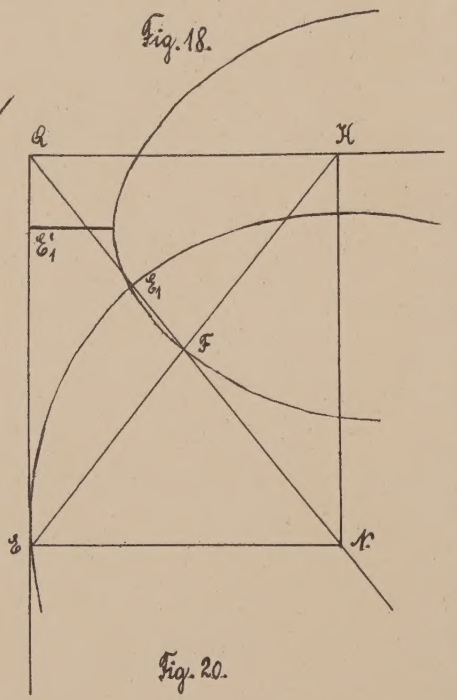


Fig. 19.

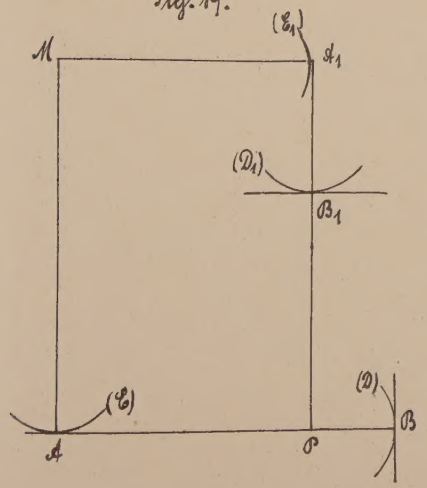


Fig. 20.

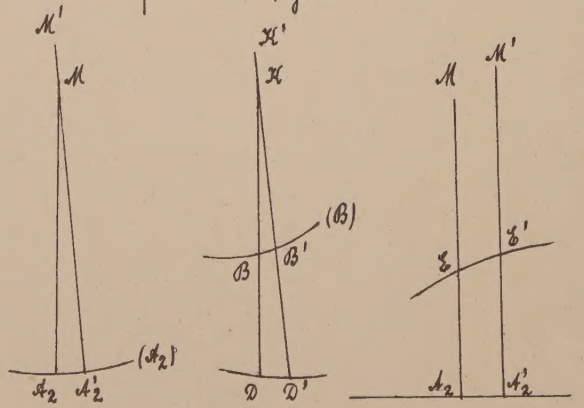


Fig. 21.

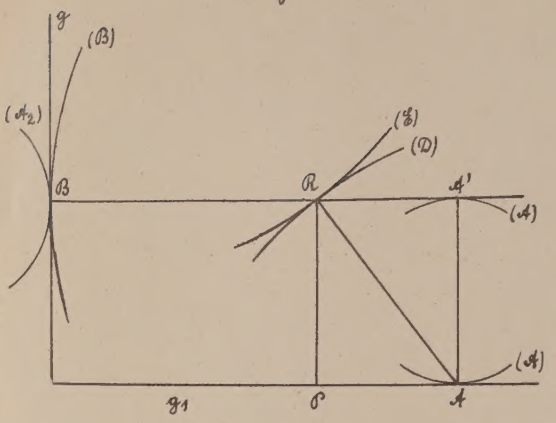


Fig. 22.

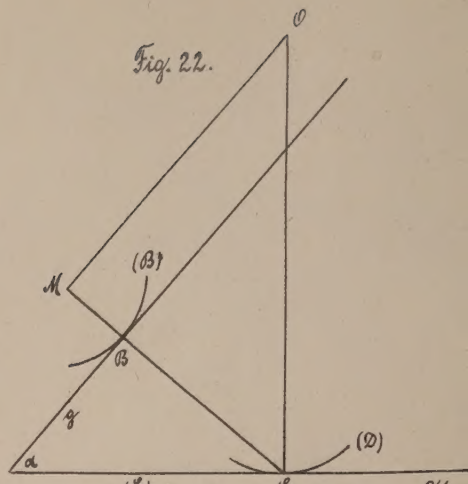


Fig. 23.

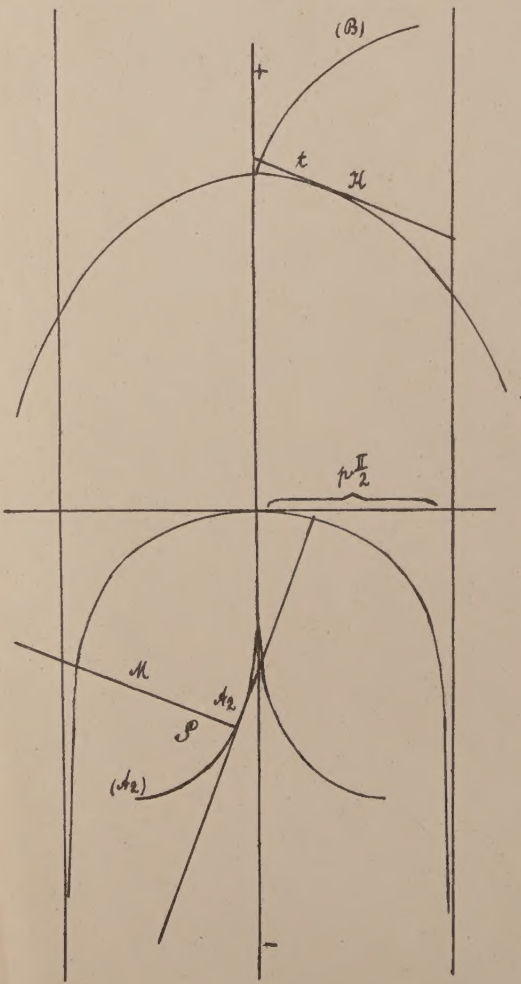


Fig. 24.

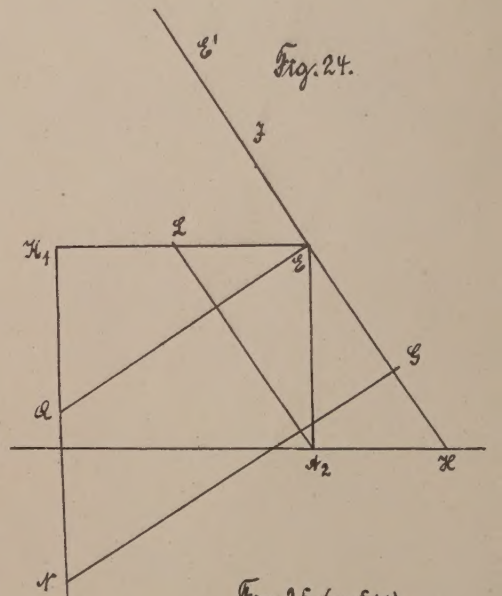
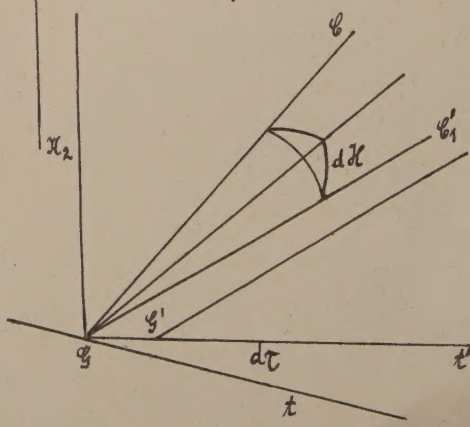



Fig. 25. (zu § 14)